

Optimale Flugmanöver in MR-LK-Szenarien

W.Grimm, K.Moritz

DFVLR Institut für Dynamik der Flugsysteme

[84 - 51500 - 74]


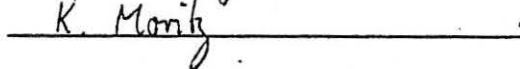
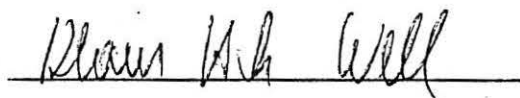
Freigabe:

Die Bearbeiter:

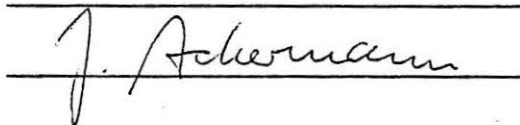
Grimm W.

Moritz K.

Unterschriften:


Dr. K.H. Well
Der Abteilungsleiter

Der stellv. Institutsdirektor:

Dr. Ing. J. Ackermann
Der Institutsdirektor:

Dieser Bericht enthält:

19	Blatt davon
1	Bilder
32	Diagramme

zusätzlich

Optimale Flugmanöver in MR-LK-Szenarien

W.Grimm, K.Moritz

DFVLR Institut für Dynamik der Flugsysteme

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
1. Untersuchung einer Mittelstrecken-Luftkampfsituation	2
1.1 Mathematisches Modell des Gesamtsystems	2
1.2 Ende des Differentialspiels	6
1.3 Funktionale (terminal payoff)	7
1.4 Numerisches Vorgehen zur approximativen Bestimmung	8
1.5 Ergebnisse	9
2. Optimale Missile Avoidance Manöver	11
2.1 Zustandsgleichungen	12
2.2 Formulierung der optimalen Steuerungsprobleme	15
2.3 Ergebnisse	16
Schrifttum	19

EINLEITUNG

Zukünftige Kampfflugzeuge werden mit Flugkörpern hoher Reichweite ausgerüstet sein (z.B. AMRAAM's, advanced medium range air to air missiles), die es gestatten, Ziele aus grosser Entfernung, d.h. von ausserhalb der Sehreichweite, zu bekämpfen. Diejenige Entfernung, aus der ein Ziel getroffen werden kann, hängt einerseits von Höhe, Geschwindigkeit und Richtung des Geschwindigkeitsvektors bezüglich der Sichtline ("Boresight"-Winkel) zum Abschusszeitpunkt ab, andererseits entscheidend vom Zielmanöver, d.h. von dem Manöver, welches das Ziel während der Flugzeit des Flugkörpers ausführt.

In einer Luftkampfsituation stellt sich nun für jedes Flugzeug das Problem, durch ein geeignetes "Pre-Launch" Manöver die Treffreichweite des/der eigenen Flugkörper zu erhöhen und durch ein geeignetes "Post-Launch" Manöver die des Gegners zu vermindern.

In diesem Bericht wird dargestellt, wie die optimalen "Pre-Launch" und "Post-Launch" Manöver berechnet werden können, ebenso wie der optimale FK-Abschusszeitpunkt gewählt werden kann. Wir beschränken uns dabei auf eine 1 vs 1 - Situation. Des weiteren wird dargestellt, wie man ein optimales Ausweichmanöver vor einem anfliegenden FK berechnen kann.

1. UNTERSUCHUNG EINER MITTELSTRECKEN-LUFTKAMPFSITUATION IM ÜBERSCHALLBEREICH ZWISCHEN ZWEI FLUGZEUGEN, DIE JEWEILS ÜBER EINEN FLUGKÖRPER VERFÜGEN, ALS 2-PERSONEN DIFFERENTIALSPIEL

1.1 Mathematisches Modell des Gesamtsystems (2 Flugzeuge + 2 Flugkörper als Massenpunkte) im Zustandsraum

Bezugssystem ist ein geostationäres ("flache Erde") Koordinatensystem. Der Zustand des Flugzeuges wird beschrieben durch die Werte der Variablen

x
 y : kartesische Koordinaten im Raum
 h

 v : Geschwindigkeit (Betrag)

 m : Masse

 q_0
 q_1 : Quaternionen
 q_2
 q_3

Wurde hier die Singularitäten-freie Darstellung mittels Quaternionen [1] gewählt, werden für den Flugkörper die klassischen Euler-Winkel verwendet.

χ : Azimuth (Winkel zwischen der positiven x-Achse
und der Projektion des Geschwindigkeitsvektors
in die (x,y)-Ebene = Horizontalebene)

γ : Bahnneigungswinkel (Winkel zwischen dem Geschwindig-
keitsvektor und der Horizontalebene)

μ : Auftriebquerneigungswinkel oder Rollwinkel
(Winkel zwischen Auftriebsvektor und der Senkrechten
zur Horizontalebene)

$$z_A = (x_A, y_A, h_A, v_A, m_A, q_{0A}, q_{1A}, q_{2A}, q_{3A})^T$$

ist der Zustandsvektor des Flugzeugs,

$$z_M = (v_M, \chi_M, \gamma_M, x_M, y_M, h_M)^T$$

der des Flugkörpers.

Die Masse ist hier keine Zustandsvariable, da ein Flugkörpermodell mit fester Schubcharakteristik verwendet wird. Auftrieb und sein Querneigungswinkel sind Steuergrößen, die durch ein festes Lenkgesetz (Proportional-Navigation im Raum) gegeben sind als Funktionen des Zustandes des Zieles

$$z_T = (v_T, \chi_T, \gamma_T, x_T, y_T, h_T)^T$$

und z_M .

Der für die Umrechnung von z_A in z_T ($z_T = z_T(z_A)$) benötigte Zusammenhang zwischen den Quaternionen q_0, q_1, q_2, q_3 und den Euler-Winkeln χ und γ ergibt sich aus den Identitäten [1]

$$\begin{aligned} \cos \gamma \cos \chi &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \\ \cos \gamma \sin \chi &= 2 (q_0 q_3 + q_1 q_2) \\ \sin \gamma &= 2 (q_0 q_2 - q_1 q_3) . \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen für den Flugkörper (nach dem Abschuss zur Zeit t_1) schreiben sich in der Form

$$\dot{z}_M = f_M(t-t_1, z_M, u_M(z_T, z_M))$$

$$f_M(\tau, z, u_M) = \begin{pmatrix} \frac{F-W}{m} - g \cdot \sin \gamma \\ \frac{A}{mv} \frac{\sin \mu}{\cos \gamma} \\ \frac{A}{mv} \cos \mu - \frac{g}{v} \cos \gamma \\ V \cdot \cos \gamma \cos \chi \\ V \cdot \cos \gamma \sin \chi \\ V \cdot \sin \gamma \end{pmatrix}$$

mit dem Schub $F = F(\tau)$, der Masse $m = m(\tau)$, (reine Funktionen der Flugzeit τ), dem Auftrieb $A = QS c_A$, dem Widerstand $W = QS c_{\lambda W}$.

($QS = \rho v^2 Fl/2$, ρ =Luftsdichte, $\rho v^2/2$ =Staudruck, Fl =Bezugsfläche, c_W =Widerstandsbeiwert; quadratische Funktion des Auftriebsbeiwertes c_A) und den in u_M zusammengefaßten Steuervariablen μ und c_A .

Die Bewegungsgleichungen für das Flugzeug lauten

$$\dot{z}_A = f_A(z_A, u_A)$$

$$f_A(z, u_A) = \begin{pmatrix} v \cdot [q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2] \\ v \cdot [2(q_0 q_3 + q_1 q_2)] \\ v \cdot [2(q_0 q_2 - q_1 q_3)] \\ \frac{T \cos \alpha - D}{m} - g[2(q_0 q_2 - q_1 q_3)] \\ -c_v T \\ -\frac{1}{2}(q_1 p_w + q_2 q_w + q_3 r_w) \\ \frac{1}{2}(q_0 p_w + q_2 r_w - q_3 q_w) \\ \frac{1}{2}(q_0 q_w - q_1 r_w + q_3 p_w) \\ \frac{1}{2}(q_0 r_w + q_1 q_w - q_2 p_w) \end{pmatrix}$$

mit

$$q_w = \frac{T \sin \alpha + L}{mv} - \frac{g}{v} [q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2]$$

$$r_w = \frac{g}{v} [2(q_0 q_1 + q_2 q_3)]$$

Darin sind Schub T , spezifischer Treibstoffverbrauch c_v , Luftwiderstand D und Auftrieb L gegeben als Funktionen der Höhe h , der Geschwindigkeit v , des Anstellwinkels α und des Drosselgrades δ . Der Steuervektor u_A umfaßt die Variablen p_w, α, δ (p_w ist die erste Komponente des Vektors der Winkelgeschwin-

digkeit $\omega = (p_w, q_w, r_w)^T$ des mit dem Flugzeug verbundenen "Wind-Achsen-Systems". p_w entspricht etwa der Rollrate.)

Für die Steuervariablen wurden folgende Beschränkungen gewählt

$$\begin{aligned} |p_w| &\leq 1.6 \text{ rad/sec} \\ 1^\circ &\leq \alpha \leq 20^\circ \\ 0 &\leq \delta \leq 1 \end{aligned}$$

(Die Ergebnisse in Abschnitt 1.5 beruhen auf Rechnungen mit festem $\delta=1$).
Der Zustand z des Gesamtsystems ist gegeben durch

$$z = (z_{A1}, z_{M1}, z_{A2}, z_{M2})^T$$

1.2 Ende des Differentialspiels

Nach dem Abschluß der beiden Flugkörper werden die Begegnungen

Flugzeug \leftrightarrow gegnerischer Flugkörper

dann als beendet betrachtet, wenn der Flugkörper dem Flugzeug nicht mehr (wesentlich) näher kommen kann. (Es ergeben sich so i.a. 2 unterschiedliche Endzeiten.)

Bezeichnet R_1 den Abstand von Flugkörper 1 zu Flugzeug 2 ($R_1 = \sqrt{(x_{A2} - x_{M1})^2 + (y_{A2} - y_{M1})^2 + (h_{A2} - h_{M1})^2}$) und \dot{R}_1 die zeitliche Ableitung von R_1 , so legt die Endbedingung

$$g_1(z_f) = 0 \quad , \quad g_1(z) = R_1 \cdot \dot{R}_1 + c \quad , \quad (c \geq 0)$$

als Forderung an den Endzustand die Endzeit t_{f1} fest. (Bei $c=0$ ist der Abstand $R_1 = 0$ oder die Annäherungsgeschwindigkeit $\dot{R}_1 = 0$, bei $c > 0$ ist $\dot{R}_1 < 0$).

Analog legt

$$g_2(z_f) = 0 \quad , \quad g_2(z) = R_2 \cdot \dot{R}_2 + c \quad , \quad (c \geq 0)$$

die Endzeit t_{f2} fest.

1.3 Funktionale (terminal payoff)

Jedes Flugzeug will so manövrieren und den Abschußzeitpunkt seines Flugkörpers so wählen, daß dieser das gegnerische Flugzeug möglichst erreicht, und es selbst den gegnerischen Flugkörper auf Distanz hält.

Diese doppelte Aufgabenstellung ist nun mathematisch in Form von geeigneten Zielfunktionalen J_1 , J_2 zu modellieren, die Flugzeug 1 bzw. Flugzeug 2 durch Wahl des Abschußzeitpunktes und seiner Steuerungen zu minimieren sucht.

- a) Formuliert man als Ziele von Flugzeug 1(2), $R_{1f}(R_{2f})$ möglichst klein zu machen und $R_{2f}(R_{1f})$ möglichst groß zu halten, und stellt man beide Ziele gleichgewichtet nebeneinander, erhält man die Funktionale

$$J_1 = R_{1f} - R_{2f}$$

$$J_2 = R_{2f} - R_{1f}$$

Man erhält so ein Nullsummen ($J_1 + J_2 = 0$) Differentialspiel.

(Unterschiedliche Wichtungen der beiden Ziele ergeben Nicht-Nullsummen-Differentialspiele.)

- b) Eine etwas differenziertere Formulierung der Ziele von Flugzeug 1 ist:

R_{1f} nur dann als zu minimieren zu betrachten,

wenn $R_{1f} > R_{cap}$ (Fangradius)

und R_{2f} nur dann als zu maximieren zu betrachten,

denn $R_{2f} < R_{sec}$ (Sicherheitsabstand).

Dies führt auf das Funktional

$$J_1 = \max\{R_{1f}, R_{cap}\} - \min\{R_{2f}, R_{sec}\}$$

und entsprechend

$$J_2 = \max\{R_{2f}, R_{cap}\} - \min\{R_{1f}, R_{sec}\}$$

(Nicht-Nullsummen-Differentialspiel)

(Mit der differenzierbaren Approximation $\Phi_\delta(x) = \sqrt{x^2 + \delta^2}$ an $\Phi_0(x) = |x|$ und den Identitäten

$$\max\{a, b\} = (a+b)/2 + |a-b|/2, \quad \min\{a, b\} = (a+b)/2 - |a-b|/2$$

ist klar, wie man die Auszahlungsfunktionen

$$\begin{aligned}a_1(z) &= \max\{R_1, R_{\text{cap}}\} - \min\{R_2, R_{\text{sec}}\} \\a_2(z) &= \max\{R_2, R_{\text{cap}}\} - \min\{R_1, R_{\text{sec}}\}\end{aligned}$$

leicht differenzierbar approximieren kann.)

1.4 Numerisches Vorgehen zur approximativen Bestimmung der "optimalen" Abschlußzeitpunkte und open-loop Steuerungen

Nicht-kooperative Gleichgewichtslösungen des Differentialspieles sind Nash-Lösungen

$$(t_{11}^*, u_{A_1}^*), (t_{12}^*, u_{A_2}^*) \text{ mit}$$

$$J_1(z_0, t_{11}^*, t_{12}^*, u_{A_1}^*, u_{A_2}^*) \leq J_1(z_0, t_{11}, t_{12}^*, u_{A_1}, u_{A_2}^*)$$

$$J_2(z_0, t_{11}^*, t_{12}^*, u_{A_1}^*, u_{A_2}^*) \leq J_2(z_0, t_{11}^*, t_{12}, u_{A_1}^*, u_{A_2})$$

für alle zulässigen Vergleichslösungen (t_{11}, u_{A_1}) , (t_{12}, u_{A_2}) . Im Falle eines Nullsummen-Differentialspieles ($J_1 = -J_2 =: J$) ergibt dies die Sattelpunktsbeziehung

$$J(z_0, t_{11}^*, t_{12}, u_{A_1}^*, u_{A_2}) \leq J(z_0, t_{11}^*, t_{12}^*, u_{A_1}^*, u_{A_2}^*)$$

$$\leq J(z_0, t_{11}, t_{12}^*, u_{A_1}, u_{A_2}^*)$$

Folgen beide Spieler ihrer optimalen Strategie, liefert die Realisierung des Differentialspieles von einem z_0 aus dem Gebiet, in dem die Nash-Lösungen existieren, "optimale" Werte für t_{11} , t_{12} und "optimale" open-loop Steuerungen. Diese Kontrollfunktionen sind nun möglichst gut in einer vorgegebenen Klasse parameterisierter Steuerungen zu approximieren, (z.B. in der Klasse der stetigen und stückweise linearen Kontrollfunktionen zu festen Gitterpunkten.) Auf diese Weise wird dem Problem, im Differentialspiel eine Nash-Lösung zu finden, mit jedem Anfangszustand z_0 ein Nash-Lösungs-Problem im Parameterraum zugeordnet.

Zur Lösung dieses Problems wird das iterative Verfahren von Han-Wilson-Powell (mittels quadratischer Programmierung) zur Lösung allgemeiner nichtli-

nearer Optimierungsaufgaben verwendet, welches der DFVLR in einer Implementierung von Kraft, Schittkowski vorliegt.

Es werden damit abwechselnd für beide Spieler einige Iterationen ausgeführt, bis beide Optimierungen abgeschlossen sind.

Dieses Verfahren benötigt neben den Funktionswerten in jeder Iteration auch die partiellen Ableitungen der (jeweiligen) Zielfunktion und der Nebenbedingungen nach den Parametern.

Es wurde ein Unterprogramm erstellt, in welchem die Zustandsgleichungen integriert und die Funktionswerte von Zielfunktion und Nebenbedingungen ausgewertet werden; zur Berechnung ihrer partiellen Ableitungen nach den Parametern bietet es zwei Möglichkeiten an:

- a) Differenzenquotienten
- b) theoretisch exakte Berechnung der Gradienten durch Integration der Variationsgleichungen des Gesamtsystems (für die Abschlußzeitpunkte) und der adjungierten Variationsgleichungen (für die Steuerparameter) einschließlich der zugehörigen Quadraturen.

(Der Vorteil der Variante b) liegt in der geringeren Anzahl der zu integrierenden Differentialgleichungen (→ kürzere Rechenzeit), erfordert dafür aber die Programmierung der zusätzlichen Differentialgleichungen.)

1.5 Ergebnisse

Betrachtet wurde folgende (symmetrische) Anfangssituation:

Die beiden (identischen) Flugzeuge begegnen sich in 9 km Höhe mit Mach 1.5 in entgegengesetzter Richtung fliegend, frontal um 15 km und seitlich um 30 km versetzt.

Das veranschlagte Zeitintervall von 35 Sekunden wurde durch 18 Gitterpunkte unterteilt, und in den Starttrajektorien die Flugkörper nach ca. 11 Sek. abgefeuert.

In der Formulierung als Nullsummen-Spiel mit

$$J = R_{1f} - R_{2f}$$

mit den Endbedingungen

$$\begin{aligned} g_1 &= R_{1f} \cdot \dot{R}_{1f} + c = 0 \\ g_2 &= R_{2f} \cdot \dot{R}_{2f} + c = 0 \end{aligned} \quad (c > 0)$$

ergab sich folgende Lösung:

Die Abschußzeitpunkte wurden stets an die vorgegebene untere Schranke vorverlegt (in mehreren Schritten verkleinert bis ca. 6,5 Sek. nach dem Start), in der Angriffsphase drehten die Flugzeuge stark aufeinander zu und drehten dann nach dem Abschuß ihrer Flugkörper tiefergehend weg; ihre Endhöhe lag bei 4 km, ihre Machzahl bei 2.12, die Endabstände waren 20 km (Draw!).

Allerdings waren in dieser Lösung das Lastvielfache und der Staudruck für die Flugzeuge zu hoch.

Neben einer Beschränkung der Endabstände $g_3 = R_{\min 2} - R_{1f} - R_{2f} \geq 0$ wurde deswegen auch eine Höhenbeschränkung eingeführt (indirekt über die Flugkörper) $g_4 = h_{M1f} + h_{M2f} - h_{\min 2} \geq 0$.

Als in Homotopieschritten $R_{\min 2}$ und $h_{\min 2}$ angezogen wurden, blieben die Abschußzeitpunkte fest.

Der erste Satz der nachfolgenden Diagramme zeigt die Lösung zu $R_{\min 2} = 28$ km, $h_{\min 2} = 10$ km (hierbei sind die 3. und 4. Nebenbedingung aktiv, d.h. die Endabstände liegen bei 14 km, die Endhöhe der Flugkörper bei 5 km). In der Angriffsphase gehen die Flugzeuge tiefer, nehmen Geschwindigkeit auf und feuern ihre Flugkörper noch mit negativem γ ab. Die 4. Nebenbedingung zwingt sie, in der Ausweichphase hochzusteigen: Endhöhe 9 km, Machzahl 2.24.

Im ersten Diagramm sind maßstabsgetreu die Flugbahnen in den Projektionen auf die (x,y)-, (h,x)-, (h,y)-Ebene wiedergegeben (Längeneinheit = 1 km). Es folgen die Zeitverläufe (über dem auf [0,1] normierten Zeitintervall) der Geschwindigkeit (in km/sec), des Staudrucks (in N/m²), der Winkel γ , χ , μ (in rad) und des Lastvielfachen - jeweils für Flugzeug 1 und Flugkörper 1.

Der zweite Satz Diagramme gehört zur Nash-Lösung, die man beim Übergang zum Nicht-Nullsummen-Spiel mit den (differenzierbar approximierten) Funktionalen

$$\begin{aligned} J_1 &= \max\{R_{1f}, R_{\text{cap}}\} - \min\{R_{2f}, R_{\text{sec}}\} \\ J_2 &= \max\{R_{2f}, R_{\text{cap}}\} - \min\{R_{1f}, R_{\text{sec}}\} \end{aligned}$$

erhält.

Bei diesen Funktionalen ist zu beachten, daß sie nur die aggressive Pre-Launch Phase wichten, solange die Endabstände größer als der Sicherheitsab-

stand sind, die Steuerungen nach dem Feuern des Flugkörpers werden dann nicht verändert.

Die Rechnung wurde von der Sattelpunktlösung aus gestartet mit $R_{\text{cap}} = 5 \text{ km}$, $R_{\text{sec}} = 0,5 \text{ km}$. Die Nebenbedingungen wurden allerdings in der abgeschwächten Form $g_1 \leq 0$, $g_2 \leq 0$ betrachtet ($g_i = R_{\text{if}} R_{\text{if}} + c$, $i = 1,2$). Abschußzeitpunkte und Endzeiten blieben fest.

In der Lösung sind die Nebenbedingungen inaktiv - die Annäherungsgeschwindigkeit ist $V_c = 0,825 \text{ km/sec}$ -, die Endabstände schrumpfen auf $2,3 \text{ km}$, die Endhöhe der Flugzeuge beträgt $13,7 \text{ km}$ bei einer Machzahl von $1,35$. Deutlich ist das geänderte Pre-Launch Manöver : Beide Flugzeuge steigen von Anfang an!

Ein Diagramm, das die Steuerungen α und p_w von Flugzeug 1 für die Sattelpunktlösung und die Nash-Lösung wiedergibt, ist angefügt. (Daß sich die Steuerungen auch nach dem Abschußzeitpunkt geändert haben - höhere Anstellwinkel -, erklärt sich daraus, daß in einigen Iterationen Endabstände in der Größenordnung von R_{sec} erreicht wurden.)

Der dritte Diagrammsatz gehört zu einer Nash-Lösung mit $R_{\text{cap}} = 0,1 \text{ km}$, $R_{\text{sec}} = 0,5 \text{ km}$, wo mit einer neuen Starttrajektorie (Höhe etwa konstant 9 km , Abschuss der Flugkörper erst nach etwa 14 sec , Flugzeit etwa 34 sec , Endabstand 3 km) begonnen wurde. Im Optimierungsverfahren blieben Abschuss- und Endzeiten unverändert. In der Lösung (nach 30 Iteration) sind die Nebenbedingungen inaktiv ($g_1 < 0$, $g_2 < 0$, $V_c = 0,55 \text{ km/sec}$), im ausgeprägten Ausweichmanöver gehen die Flugzeuge tiefer bis auf $7,1 \text{ km}$ bei Mach 1.54 , Endabstände: $1,5 \text{ km}$, (Lastvielfache zu hoch).

2. OPTIMALE MISSILE AVOIDANCE MANÖVER

In diesem Abschnitt werden die oben bereits geschilderten "Post- Launch" Manöver für drei Anfangssituationen, die aus digitalen LK- Simulationen entnommen werden , genauer analysiert. Bei dieser Analyse werden diesselben Flugzeug- und Flugkörpermodelle wie in Abschnitt 1 verwendet. Lediglich die Bewegungsgleichungen werden etwas anders gewählt.

2.1 Zustandsgleichungen

Die Berechnung der Flugbahnen erfolgt durch numerische Integration der folgenden Differentialgleichungen. (Bezeichnungen: Index T= Flugzeug (target), Index M= Flugkörper (missile)).

Polarkoordinaten der Relativgeometrie (s. Skizze auf S.13)

R: Abstand Flugzeug/Flugkörper
 θ : vertikaler Sichtlinienwinkel
 ψ : horizontaler Sichtlinienwinkel

Zustandsvariable von Flugzeug und Flugkörper:

h_T, h_M : Höhen
 V_T, V_M : Geschwindigkeiten
 γ_T, γ_M : Bahnneigungswinkel
 χ_T, χ_M : Azimuthwinkel

Steuerungen:

n_T, n_M : Lastvielfache
 μ_T, μ_M : Auftriebsquerneigungswinkel

n_M und μ_M sind der Proportionalnavigation entsprechende Funktionen des Zustandsvektors (s. Seite 3)

$$n_M = n_M(R, \theta, \psi, h_T, h_M, V_T, V_M, \gamma_T, \gamma_M, \chi_T, \chi_M)$$

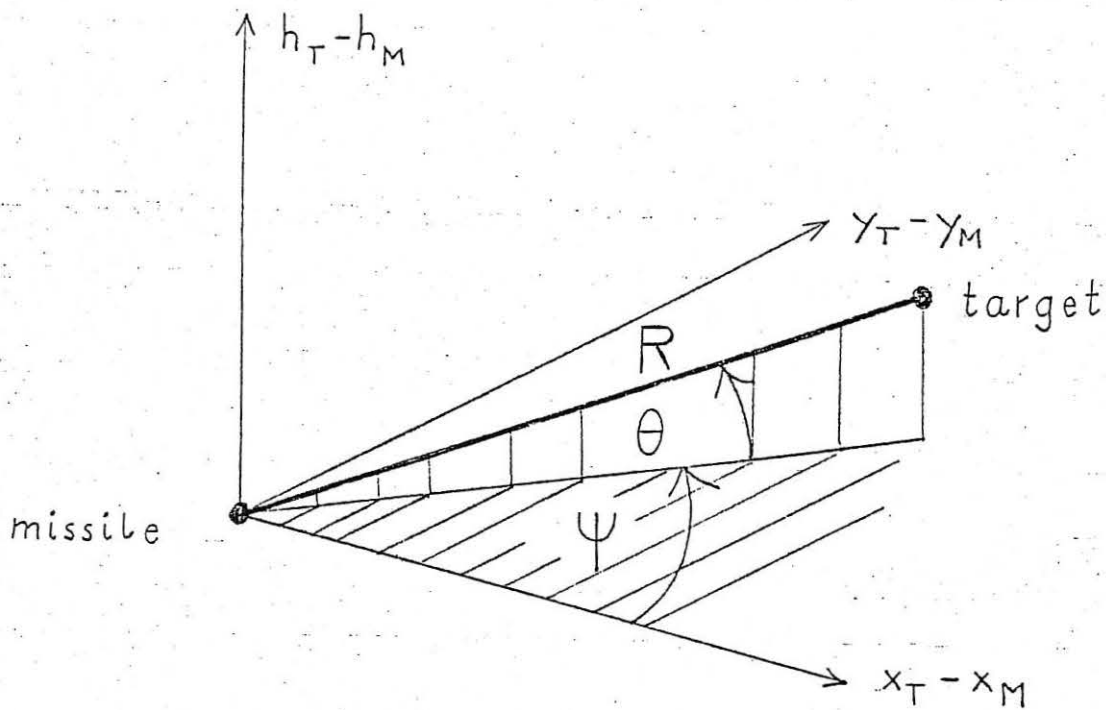
$$\mu_M = \mu_M(R, \theta, \psi, h_T, h_M, V_T, V_M, \gamma_T, \gamma_M, \chi_T, \chi_M)$$

Die zu optimierenden Flugzeugsteuerungen sind durch

$$(1) \quad 0 \leq n_T \leq 9$$

$$(2) \quad |\mu_T| \leq \pi$$

beschränkt.



Abgeleitete Größen:

$D_T(V_T, h_T, n_T)$, $D_M(V_M, h_M, n_M)$:

Luftwiderstandsfunktionen

$F_T(V_T, h_T)$, $F_M(t)$:

Maximalschub des Flugzeugs, Schub des Flugkörpers

$W_M(t)$:

Gewicht des Flugkörpers

Konstanten

W_T : Gewicht des Flugzeugs

g : Erdbeschleunigung

$$(3) \quad \dot{R} = -V_M [\cos \theta \cos \gamma_M \cos(\chi_M - \psi) + \sin \theta \sin \gamma_M] \\ + V_T [\cos \theta \cos \gamma_T \cos(\chi_T - \psi) + \sin \theta \sin \gamma_T]$$

$$(4) \quad \dot{\theta} = \frac{1}{R} \{ -V_M [\cos \theta \sin \gamma_M - \cos \gamma_M \sin \theta \cos(\chi_M - \psi)] \\ + V_T [\cos \theta \sin \gamma_T - \cos \gamma_T \sin \theta \cos(\chi_T - \psi)] \}$$

$$(5) \quad \dot{\psi} = \frac{1}{R \cos \theta} [-V_M \cos \gamma_M \sin(\chi_M - \psi) \\ + V_T \cos \gamma_T \sin(\chi_T - \psi)]$$

$$(6) \quad \dot{h}_T = V_T \sin \gamma_T$$

$$(7) \quad \dot{V}_T = g \left(\frac{F_T - D_T}{W_T} - \sin \gamma_T \right)$$

$$(8) \quad \dot{V}_M = g \left(\frac{F_M - D_M}{W_M} - \sin \gamma_M \right)$$

$$(9) \quad \dot{\gamma}_T = \frac{g}{V_T} (n_T \cos \mu_T - \cos \gamma_T)$$

$$(10) \quad \dot{\gamma}_M = \frac{g}{V_M} (n_M \cos \mu_M - \cos \gamma_M)$$

$$(11) \quad \dot{\chi}_T = \frac{g}{V_T} \frac{n_T \sin \mu_T}{\cos \gamma_T}$$

$$(12) \quad \dot{\chi}_M = \frac{g}{V_M} \frac{n_M \sin \mu_M}{\cos \gamma_M}$$

Die Flugkörperhöhe h_M berechnet sich gemäß $h_M = h_T - R \sin \theta$.

2.2 Formulierung der optimalen Steuerungsprobleme

Die Suche nach dem bestmöglichen Ausweich-Manöver wird auf zwei Arten als optimales Steuerungsproblem formuliert. Nebenbedingungen sind in jedem Fall die Steuerbeschränkungen (1), (2), die Differentialgleichungen (3)-(12) und die Zustandsbeschränkung $h_T \geq 0$. In beiden Aufgabenstellungen ist die Endzeit frei; die Anfangswerte aller Zustandsvariablen sind fest vorgeschrieben.

(P1) Maximiere den Endabstand $R(t_f)$ unter der Nebenbedingung $\dot{R}(t_f) = \dot{R}_f$

(P2) Maximiere die Endzeit t_f unter der Nebenbedingung $R(t_f) = R_f, \dot{R}(t_f) < 0$.

Der festgeschriebene Endwert \dot{R}_f der Annäherungsgeschwindigkeit ist negativ im Fall eines Treffers, gleich null im Fall eines erfolgreichen Ausweich-Manövers.

Die gezeigten Beispiele gehen von folgenden fest vorgeschriebenen Anfangssituationen aus:

	Satz 1	Satz 2	Satz 3
$R(0)$ in km:	8.51	9.08	9.15
Machzahl des Flugzeugs:	1.01	1.55	0.84
Machzahl des Flugkörpers:	3.58	3.57	3.58
$h_T(0)$ in km	0.18	8.56	7.03
$h_M(0)$ in km	5.63	8.89	10.00
$x_T(0)$ in °	125.00	103.00	24.00
$x_M(0)$ in °	14.00	21.90	9.00
Flugzeit t_{FK} des Flugkörpers bei Akquisition in sec.	8.00	16.00	20.00

In allen Fällen gilt $\psi(0) = \gamma_T(0) = \gamma_M(0) = 0$. Die Angabe von t_{FK} ist erforderlich wegen der explizit zeitabhängigen Funktionen $F_M(\tau)$ und $W_M(\tau)$, wobei τ die Zeit nach Abschuss des Flugkörpers ist. Der Zusammenhang mit der Zeit t

nach Beginn des Manövers ist $\tau = t + t_{FK}$. Der Flugkörper wird also t_{FK} Sekunden nach Abschluß zum Zeitpunkt $t = 0$ bzw. $\tau = t_{FK}$ entdeckt ("Akquisition").

Die Steuerungen n_T und μ_T werden als Polygonzüge über acht äquidistanten Teilintervallen modelliert; Parameter des Optimierungsverfahrens sind folglich die Steuergrößen an den Zwischenpunkten $t_i = i \cdot t_f / 8$, $0 \leq i \leq 8$, und die freie Endzeit. Die Zustandsbeschränkung $h_T \geq 0$ wird durch die Nebenbedingungen $h_T(t_i) \geq 0$, $1 \leq i \leq 8$, berücksichtigt.

2.3 Ergebnisse

Von den bisher gerechneten Flugbahnen wurden folgende Kombinationen von Problemstellung und Anfangsdaten ausgewählt:

	Problemstellung	Anfangswerte	Diagramme
Beisp.1)	(P2) mit $R_f = 100$ m	Satz 1	II.1.a - II.1.i
Beisp.2)	(P1) mit $R_f = 0$	Satz 2	II.2.a - II.2.k
Beisp.3)	(P1) mit $R_f = -200$ m/s	Satz 3	II.3.a - II.3.l

Bezeichnungen in den Diagrammen : XT,YT,HT bzw. XM,YM,HM : Koordinaten des Flugzeugs bzw. Flugkörpers bezüglich eines Inertialsystems, das durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} XM(0) &= 0, \quad YM(0) = 0 \\ XT(0) &= R(0) \cos(\theta(0)), \quad YT(0) = 0 \\ HM(0) &= h_M(0), \quad HT(0) = h_T(0) \end{aligned}$$

festgelegt ist.

VT,VM	: V_T, V_M in m/sec
CL	: Auftriebsbeiwert des Flugzeugs
MUE	: μ_T in Radian
N	: n_T
Q	: Staudruck in kp/m^2
GAMT	: γ_T in Radian
AMT	: Machzahl des Flugzeugs

In Diagrammen mit zwei Kurven bezieht sich die durchgezogene Linie auf das Flugzeug, die gestrichelte Linie auf den Flugkörper. Längeneinheit ist Meter, Zeiteinheit eine Sekunde. (x,y)-, (x,h)-, und (y,h)-Diagramme wurden mit gleichem Maßstab auf beiden Achsen angefertigt. Die drei Anfangssituationen sind einer Beispielsammlung der Firma MBB entnommen. Im zweiten Beispiel wird der Flugkörper mit einem Endabstand von 719 m ausmanövriert.

Bei allen missile-avoidance Manövern sind folgende Phasen mehr oder weniger ausgeprägt:

1. Anfängliche Drehung zur Sichtlinie: Diese Phase ist gekennzeichnet durch maximales Lastvielfaches und Rollwinkel in der Umgebung von $\pm \pi/2$ (beachte die DGL für χ !). Die Geschwindigkeitsaufnahme ist aufgrund des hohen induzierten Widerstandes gering. Die Ausprägung dieses hard turns hängt von der Differenz $|\chi_T(0) - \psi(0)|$ ab. Er nimmt dementsprechend in den ersten zwei Beispielen den größten Teil des Manövers ein.

2. Übergang zum tail chase: Diese Phase dient dem Geschwindigkeitsaufbau. Sie ist am Ende des ersten Beispiels andeutungsweise erkennbar durch

- abnehmendes Lastvielfaches,
- $\mu_T \rightarrow 0$ und
- zunehmende Geschwindigkeit, was sich aufgrund der geringen Höhe in rapide steigendem Staudruck (Staudruck $q = 1/2 \rho(h)V^2$, $\rho(h)$ = Luftdichte in Abhängigkeit von der Höhe) bemerkbar macht.

Normalerweise wird die Beschleunigung durch Höhenverlust wie in den Beispielen 2 und 3 unterstützt. Die Beschränkung $h_T \geq 0$ verhindert dieses "Wegtauchen" in Beispiel 1. Die kritische Grenze für den Staudruck liegt bei etwa 10.000 kp/m². Sie wird in diesen Beispielen nicht, bei ausgeprägten tail-chase-Szenarien jedoch fast immer erreicht.

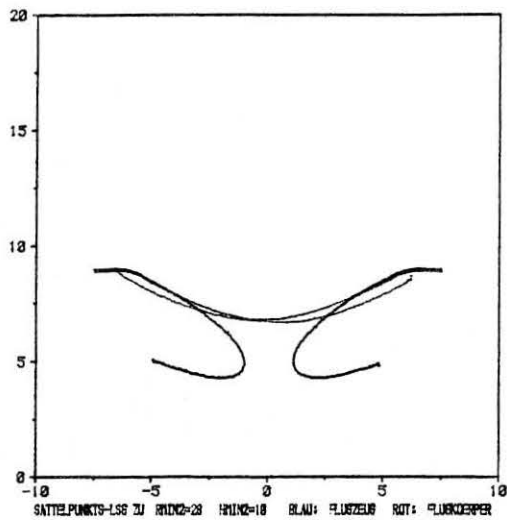
3. Last ditch maneuver, ein ruckartiges Gegensteuern zur bisherigen Flugbewegung am Ende des Manövers. Seine Bedeutung liegt darin, daß der Flugkörper durch ein entsprechendes Verfolgungsmanöver Energie verliert. Dieses Phänomen ist in den Beispielen 2 und 3 erkennbar. Die Gegenbewegung zum bisherigen Kurs vollzieht sich sowohl im Vertikalen als auch im Horizontalen. Beispiel 2 endet mit einem leichten Höhenanstieg; in Beispiel 3 nimmt zumindest der Bahnneigungswinkel zu. Die Horizontalprojektionen der Flugbahnen ändern in beiden Fällen ihre Krümmung. Der Steueraufwand für dieses Teilma-

nöher zeigt sich in Beispiel 3 in einer plötzlichen Spitze im Lastvielfachen. Dementsprechend flacht der Geschwindigkeitsverlauf (und damit auch der Verlauf des Staudrucks) aufgrund des steigenden induzierten Widerstands ab.

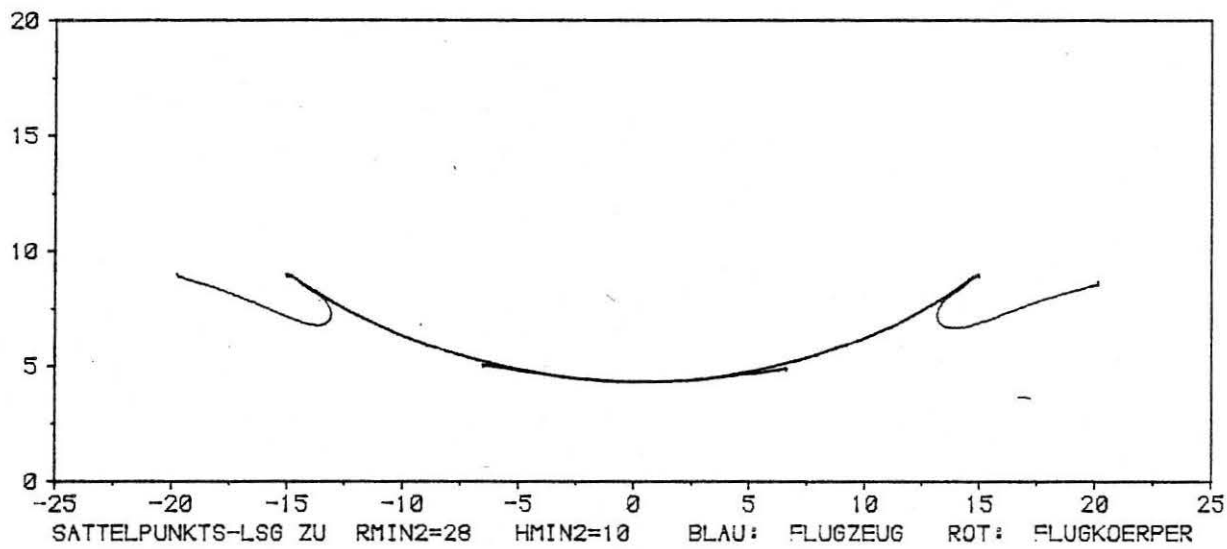
SCHRIFTTUM

- [1] Wuensche, H.J.. Singularity-free Methods for Aircraft Flight Path Optimization using Euler Angles and Quaternions.
Master of Science Thesis, University of Texas, 1982.

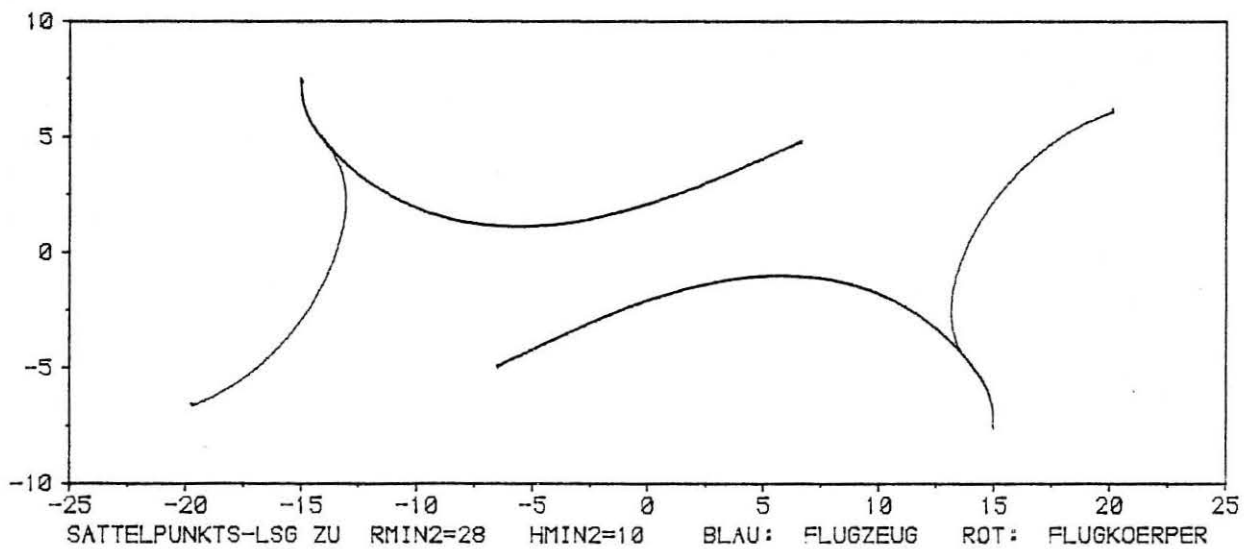
H VS Y



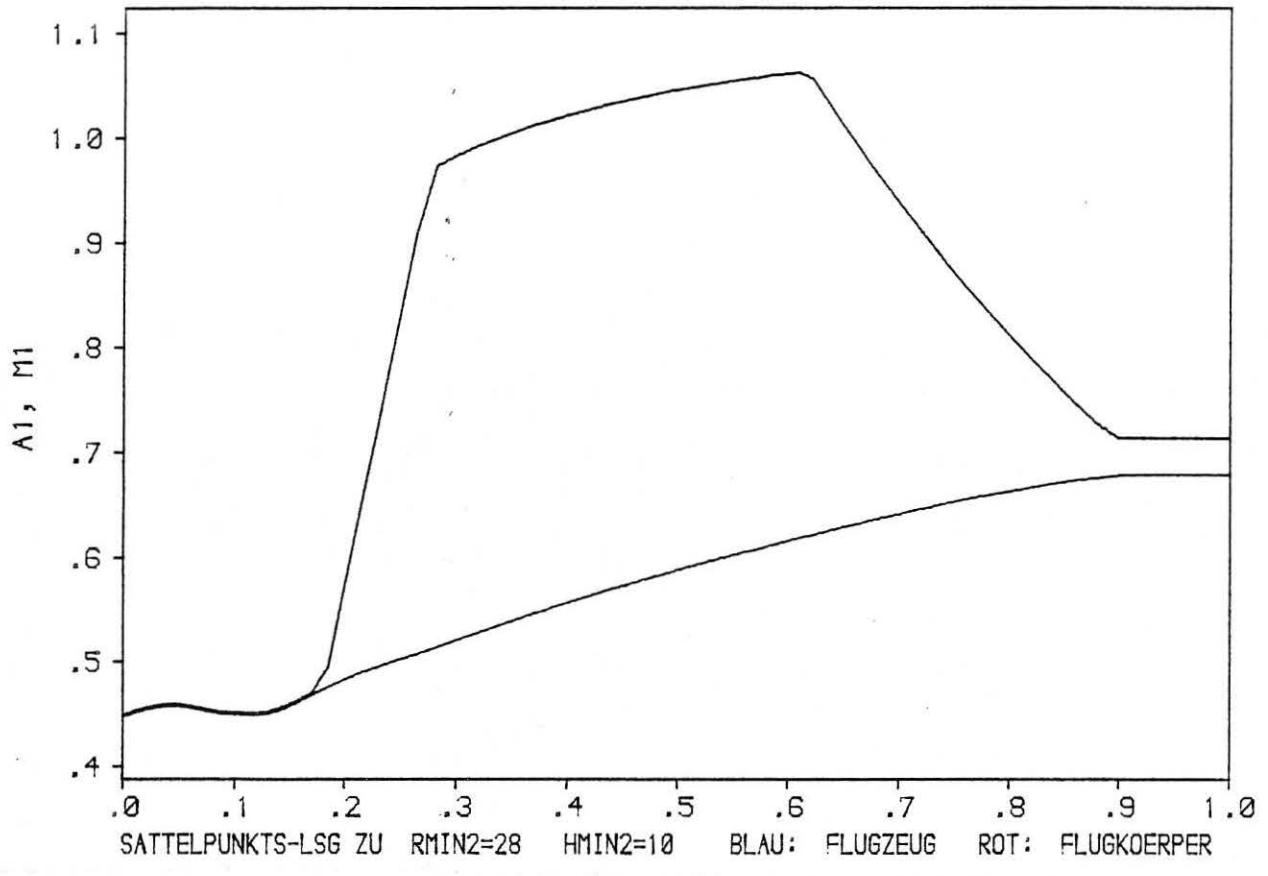
H VS X



Y VS X

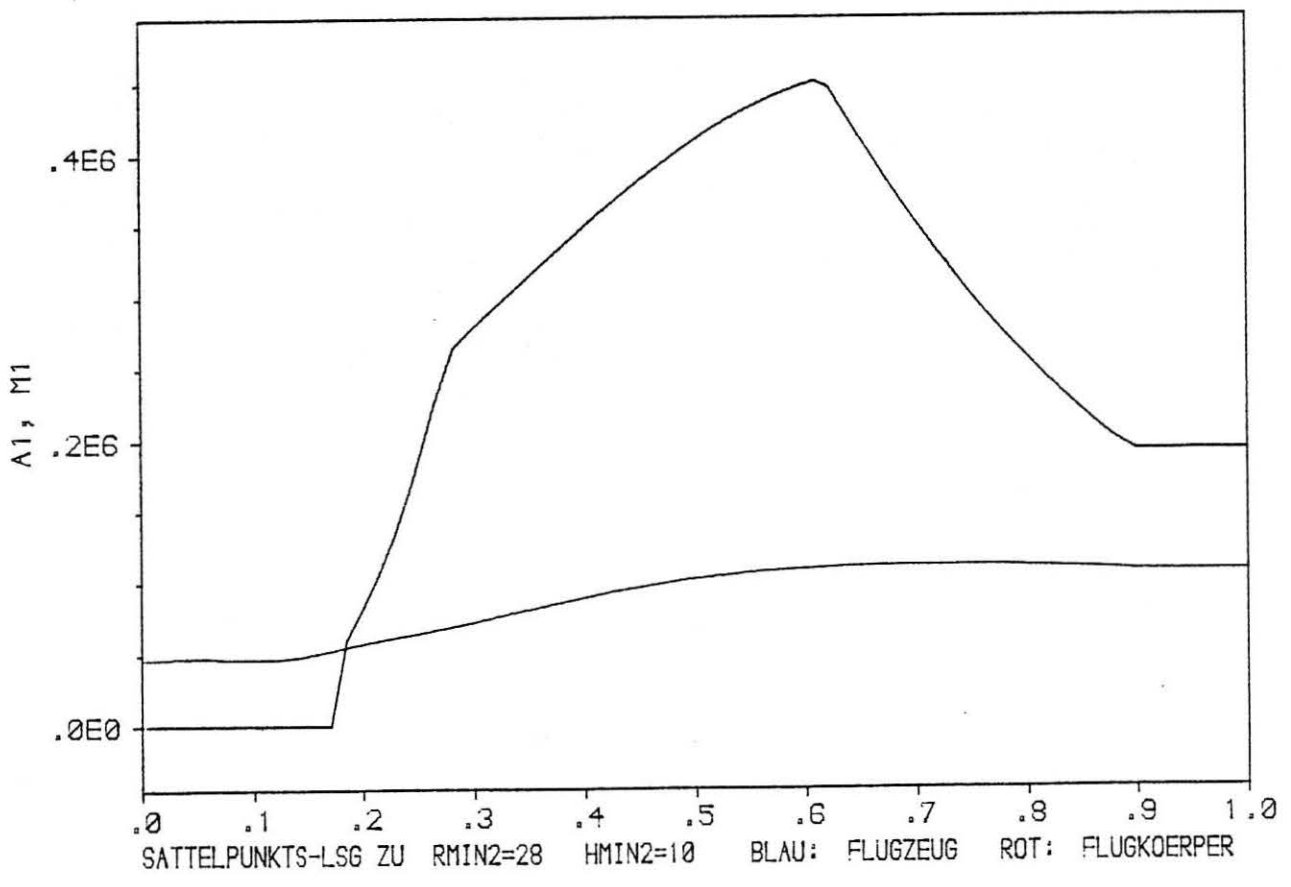


V VS T

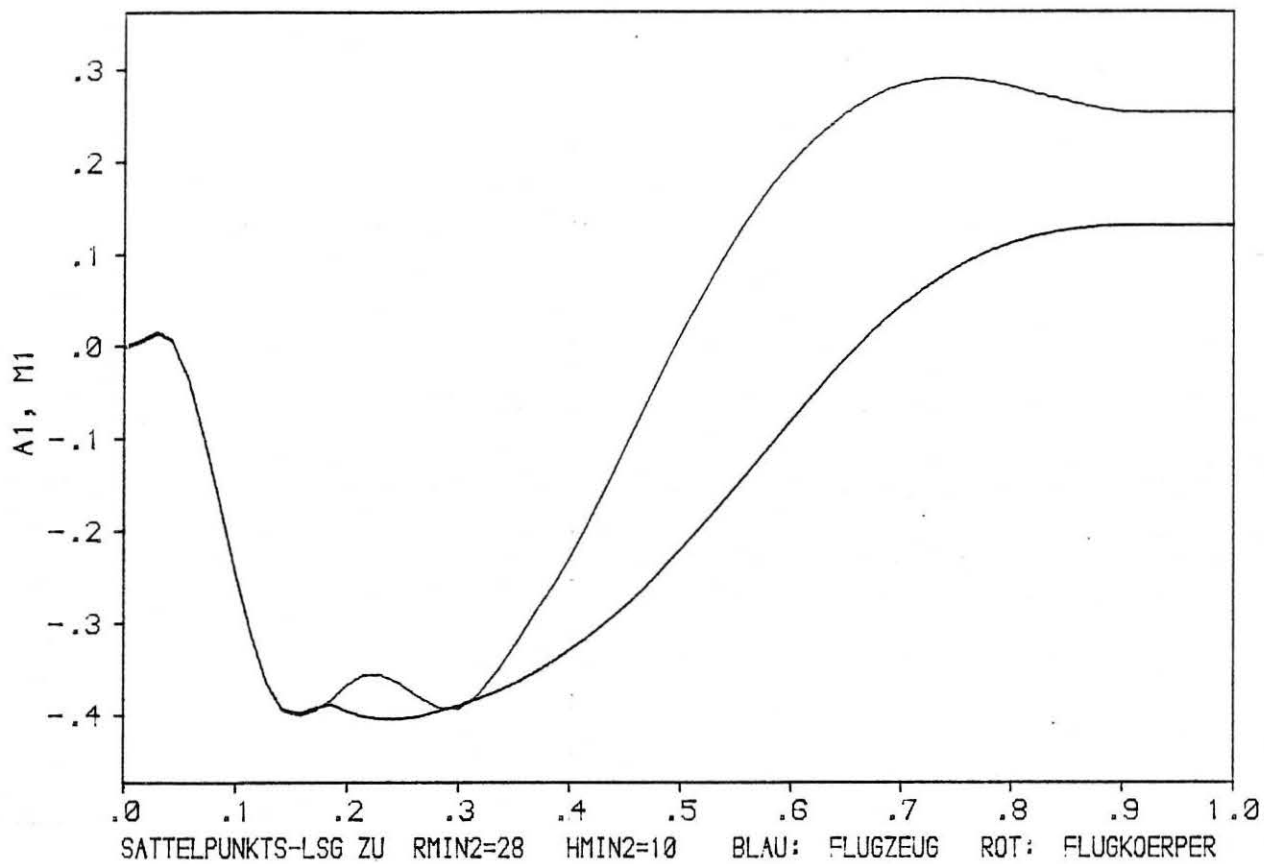


4

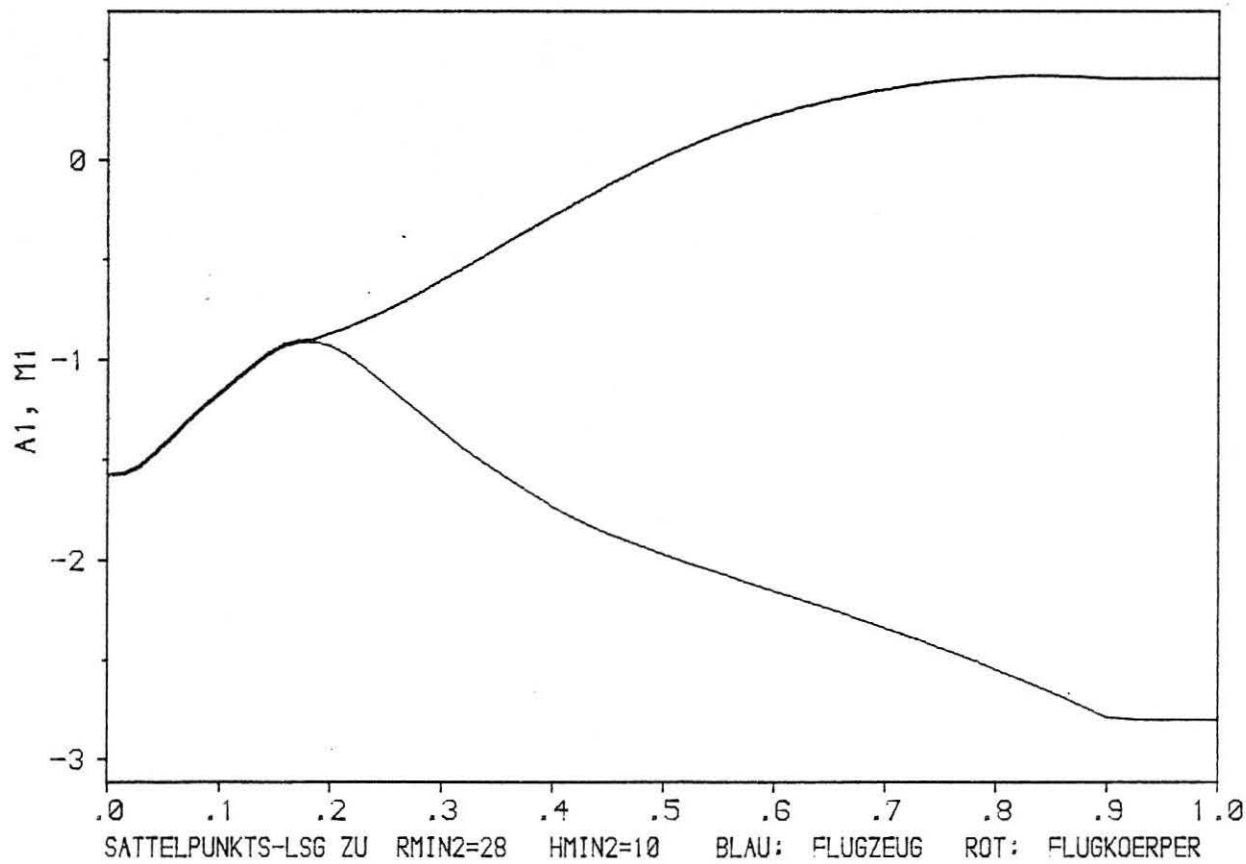
STAUDRUCK VS T



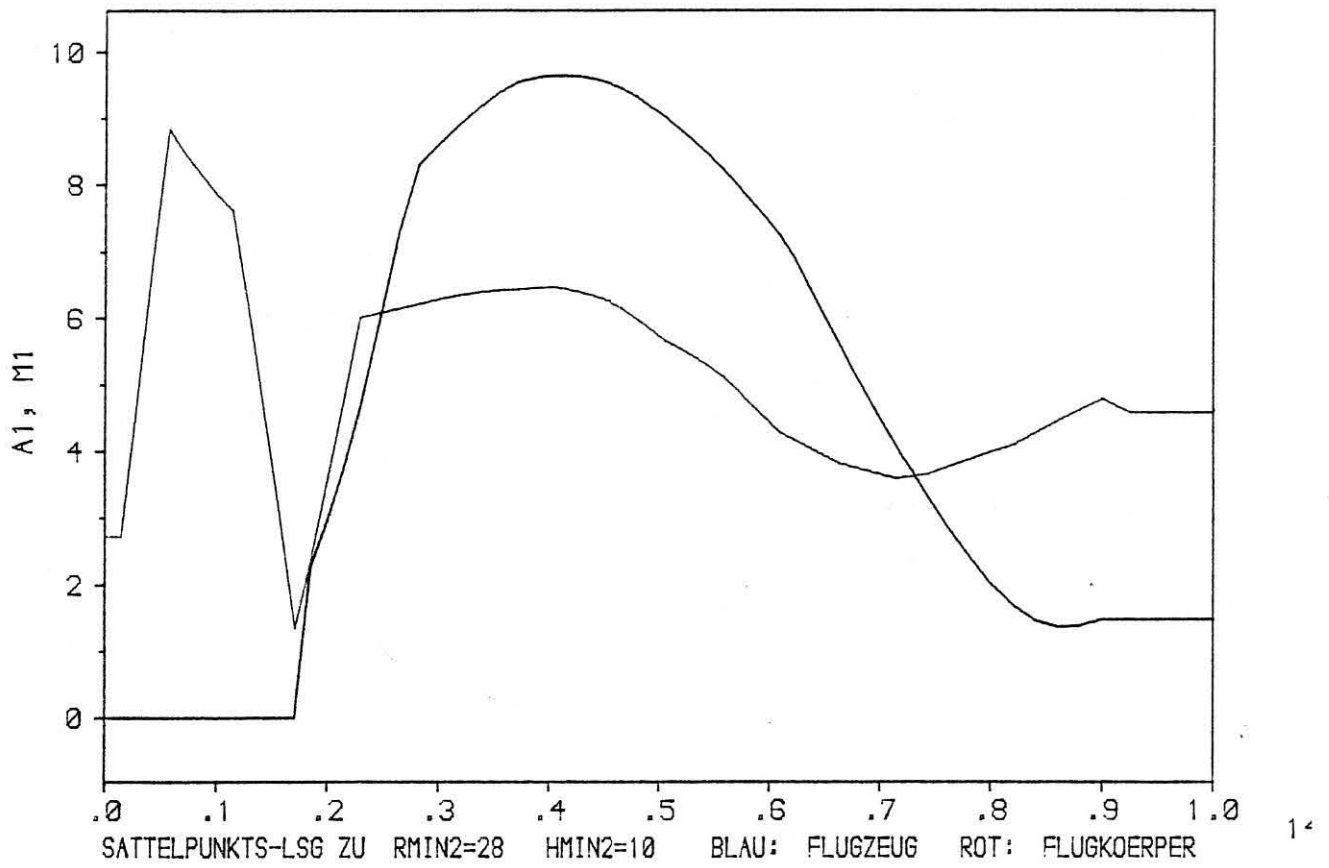
1



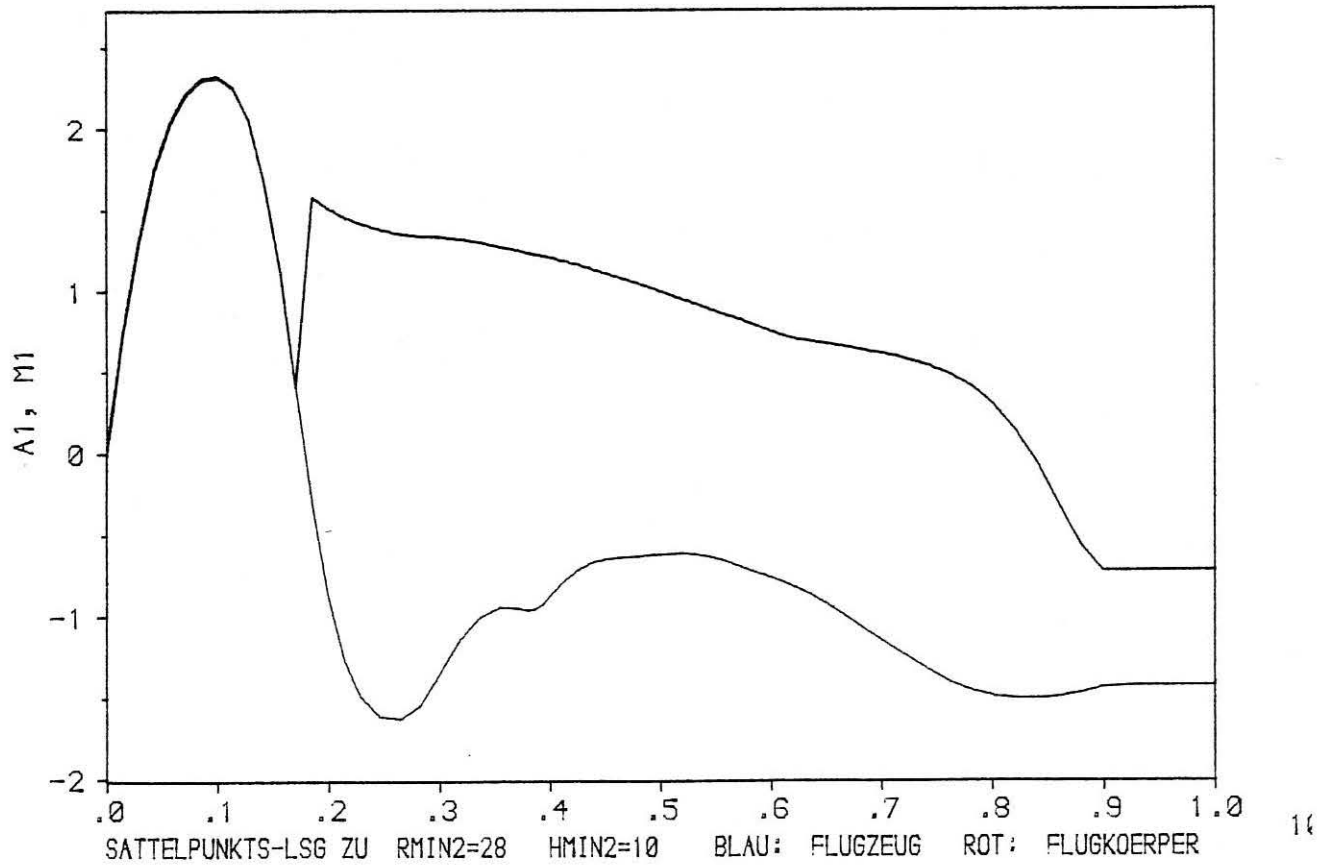
8



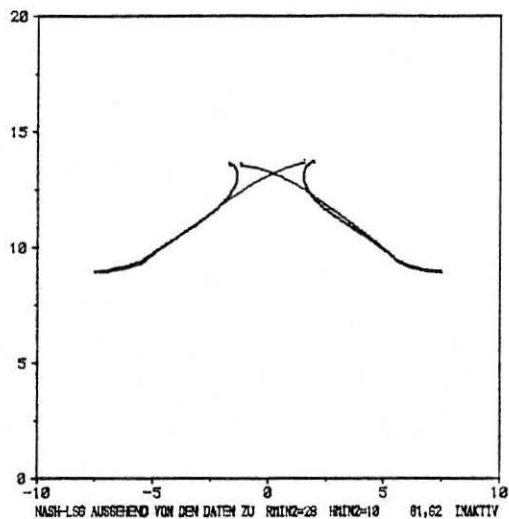
6



MY VS T

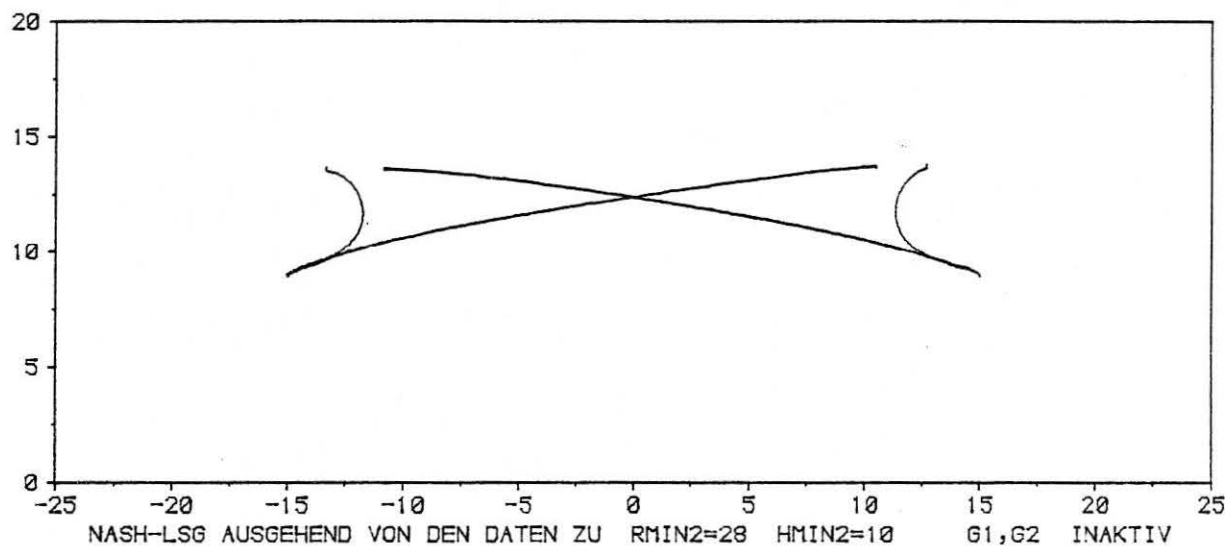


H VS Y



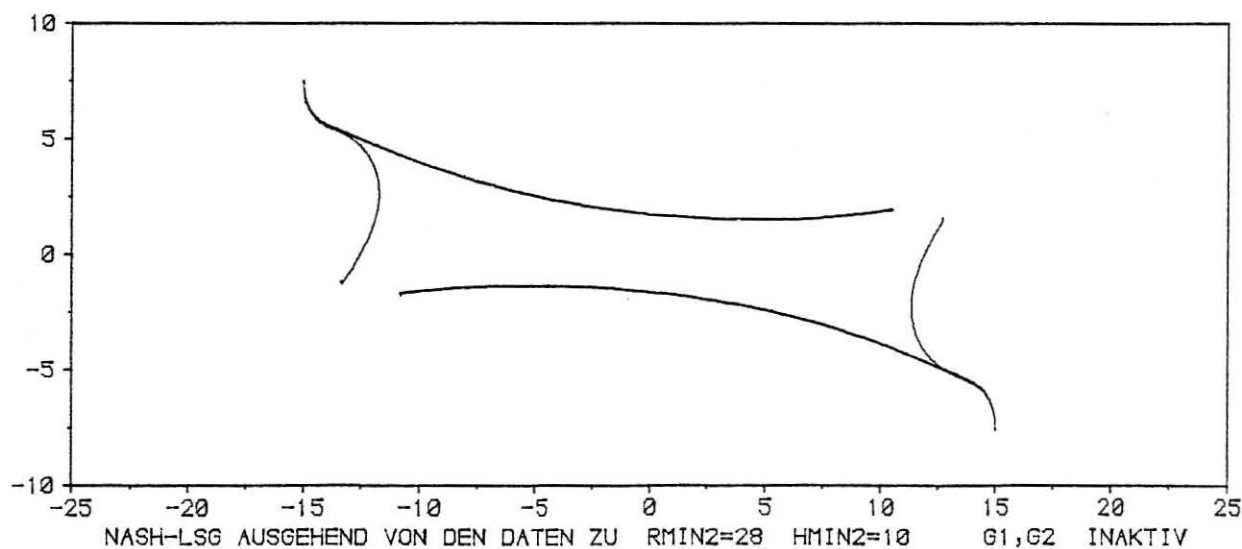
3

H VS X

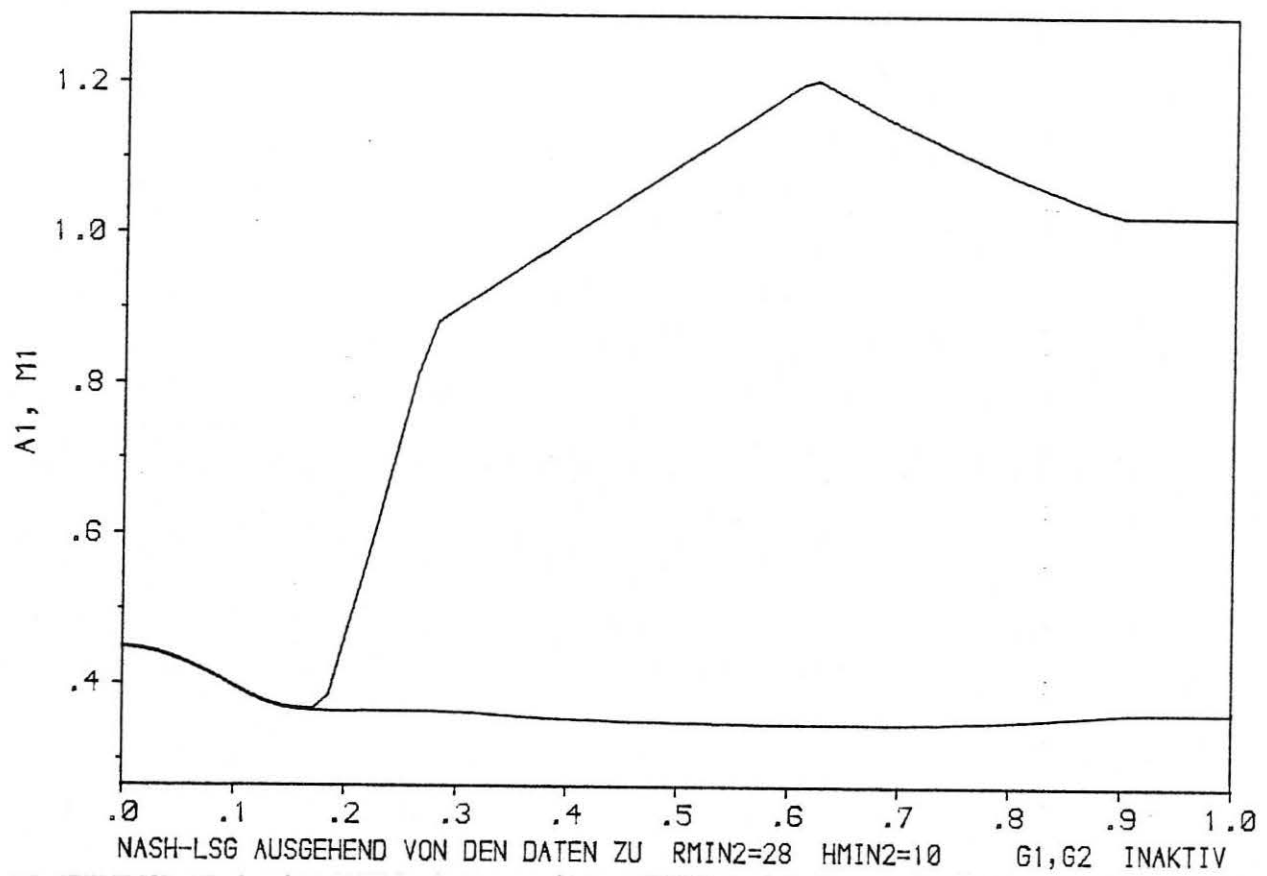


2

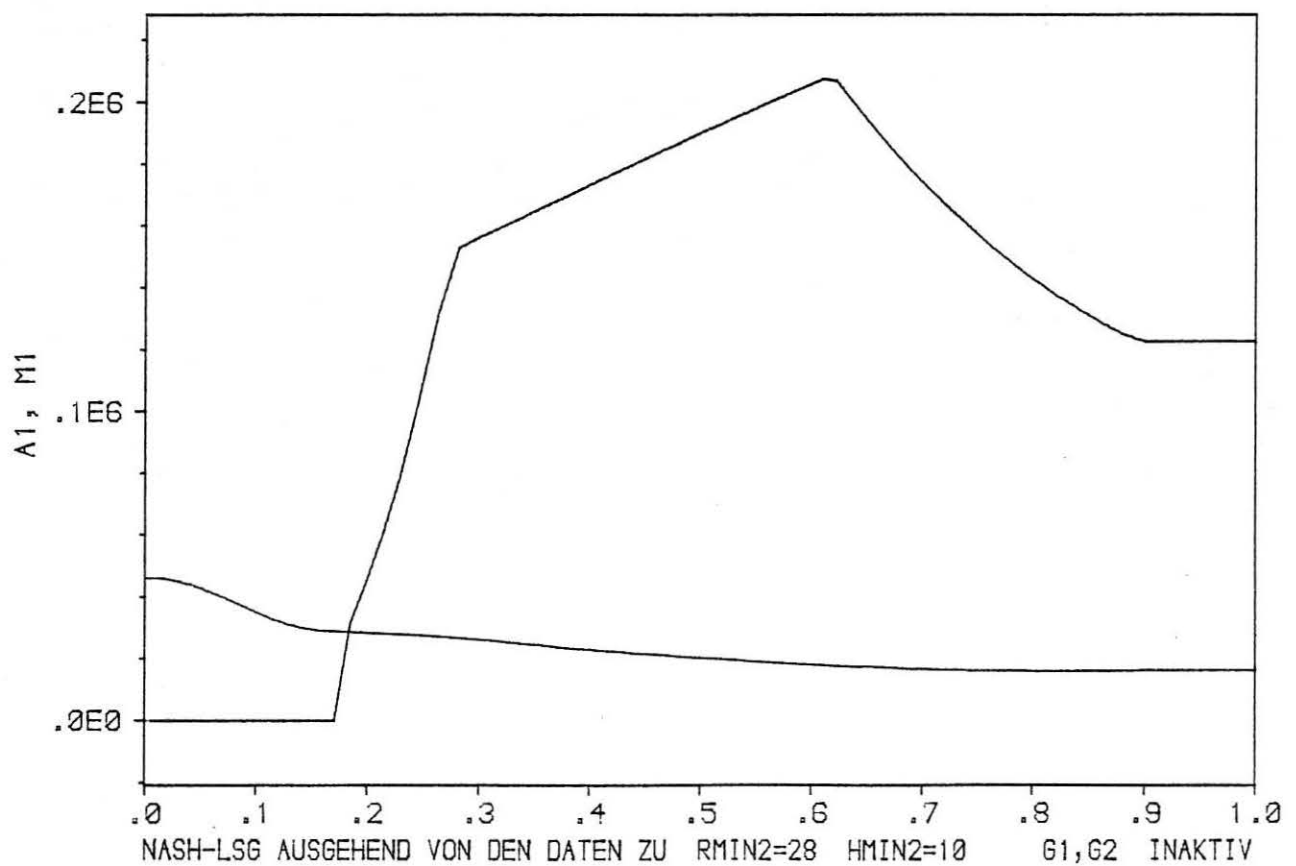
Y VS X

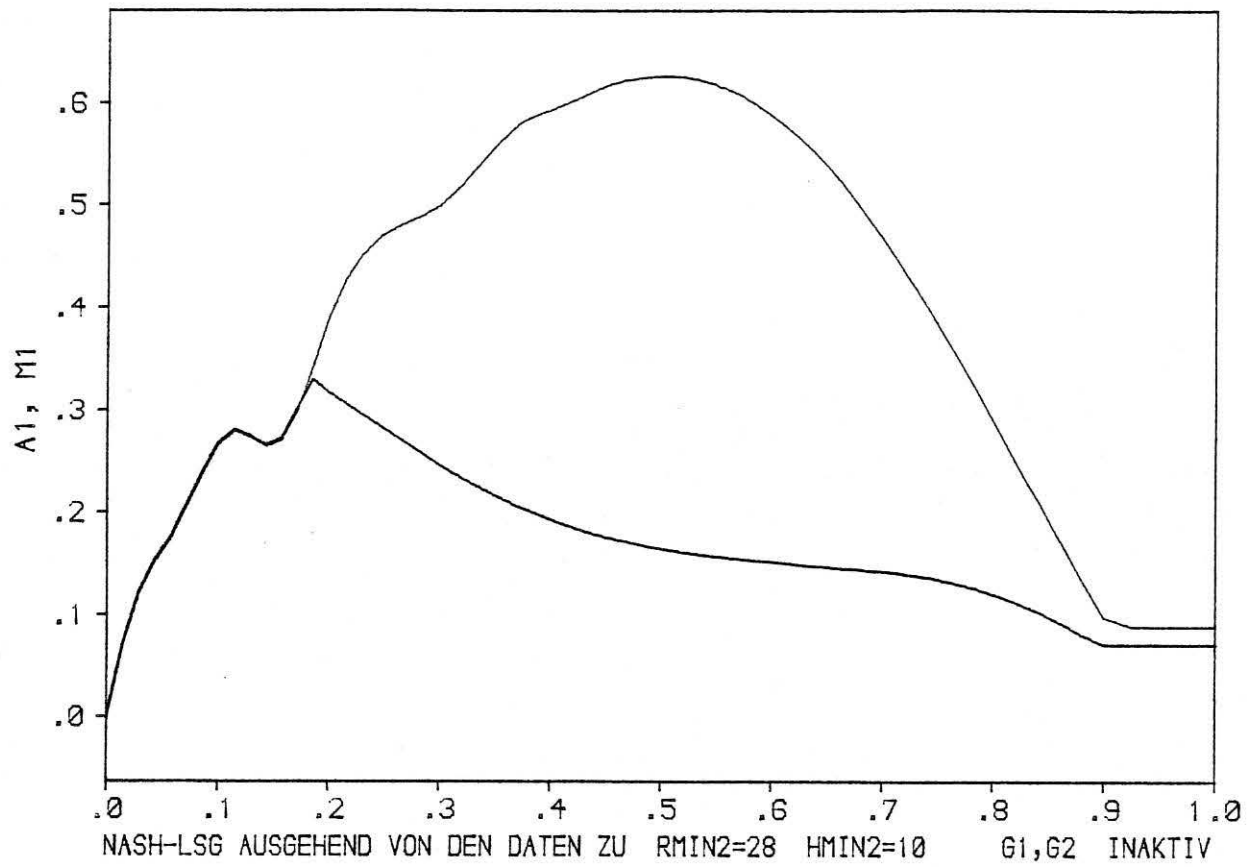


V VS T

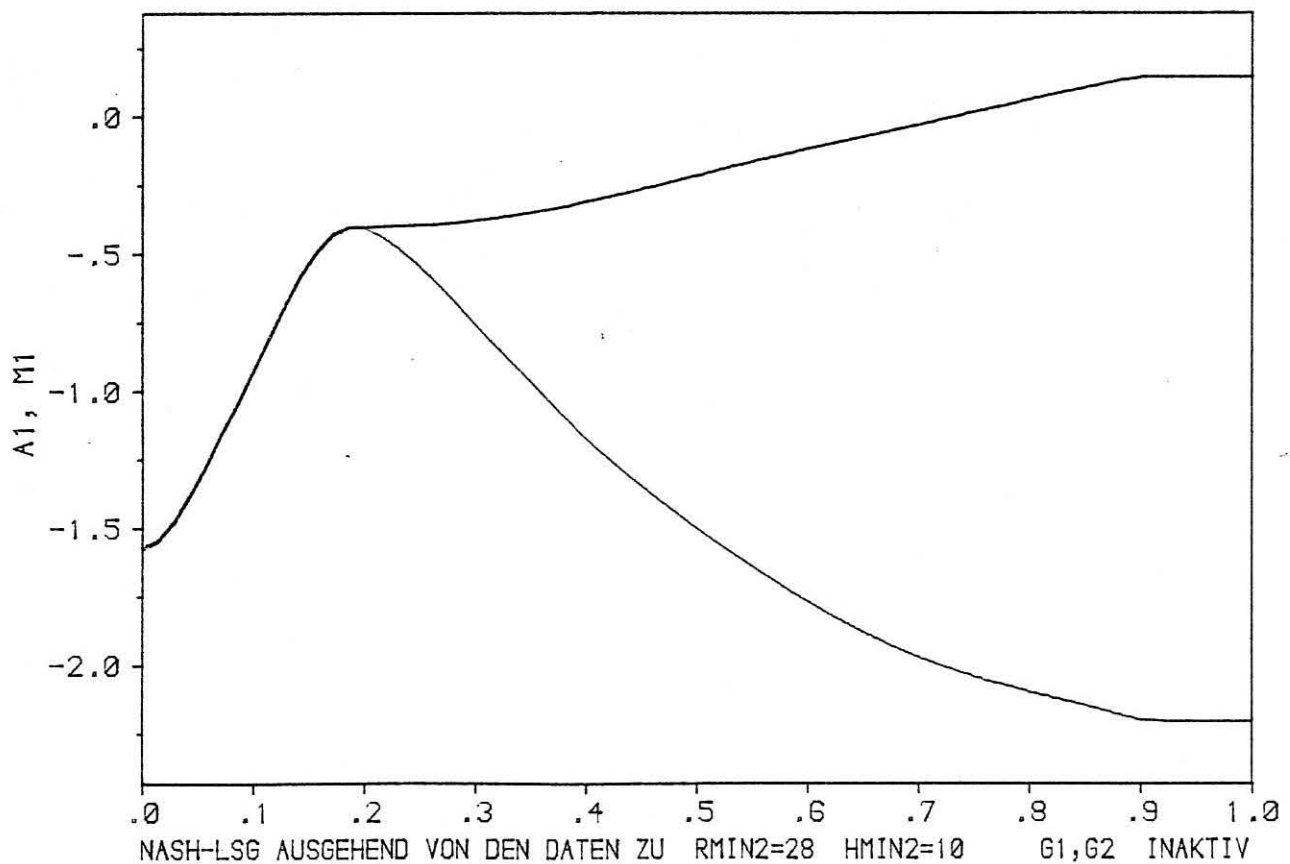


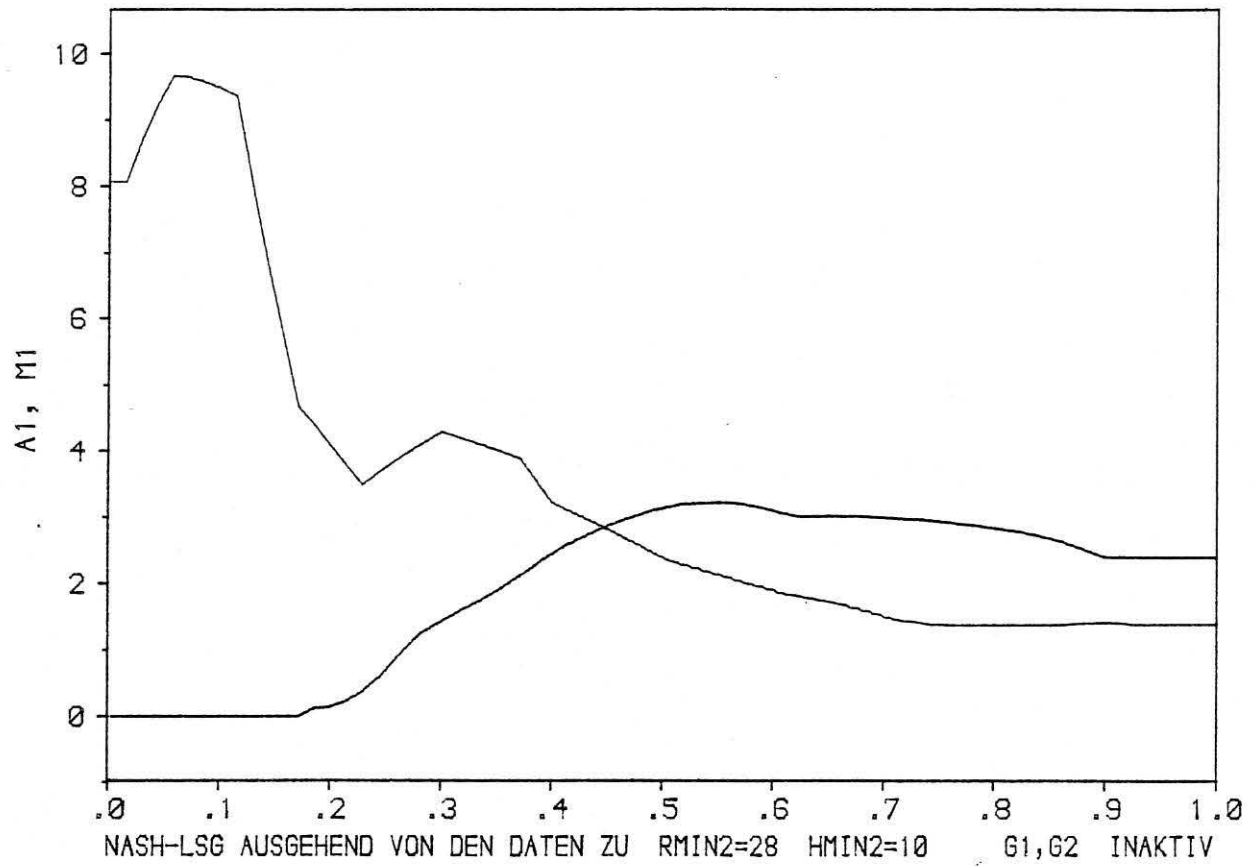
STAUDRUCK VS T



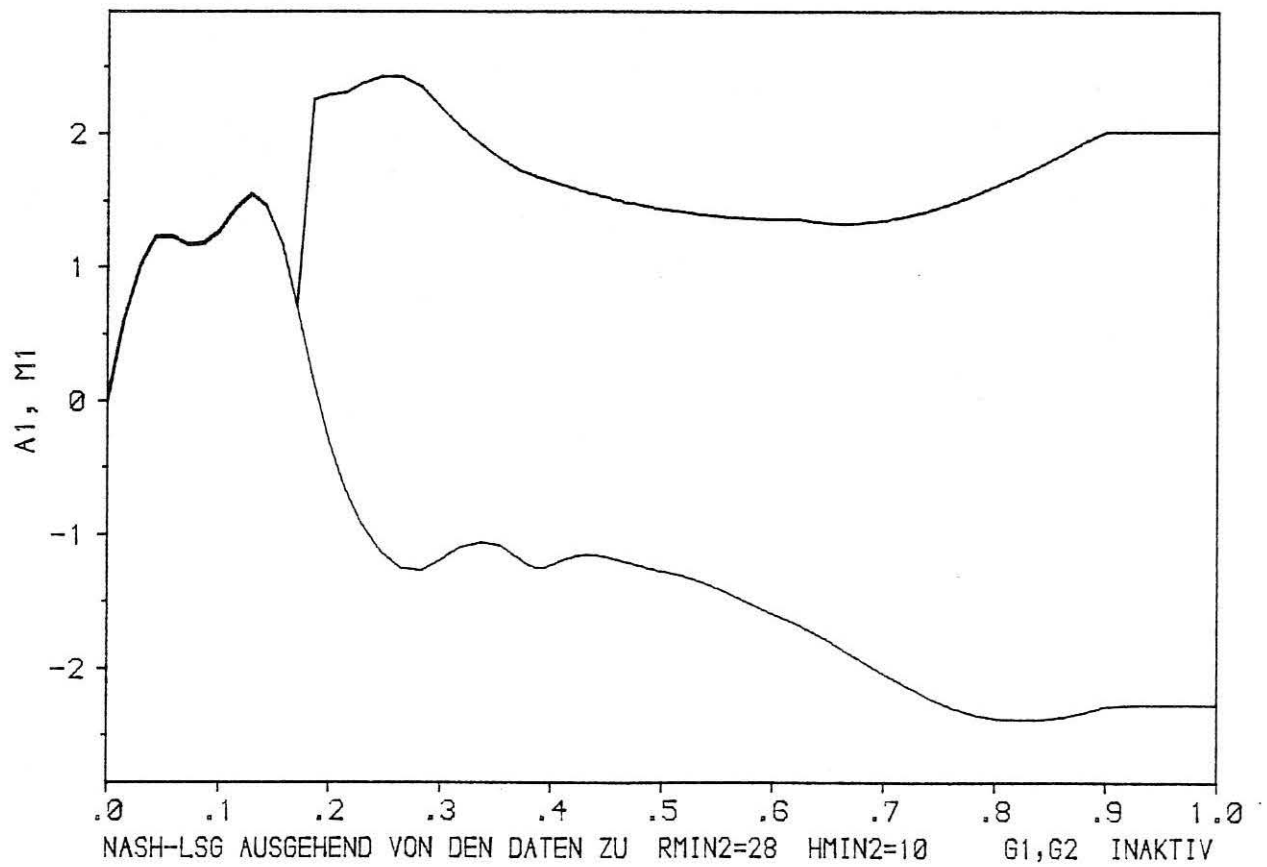


CHI VS T

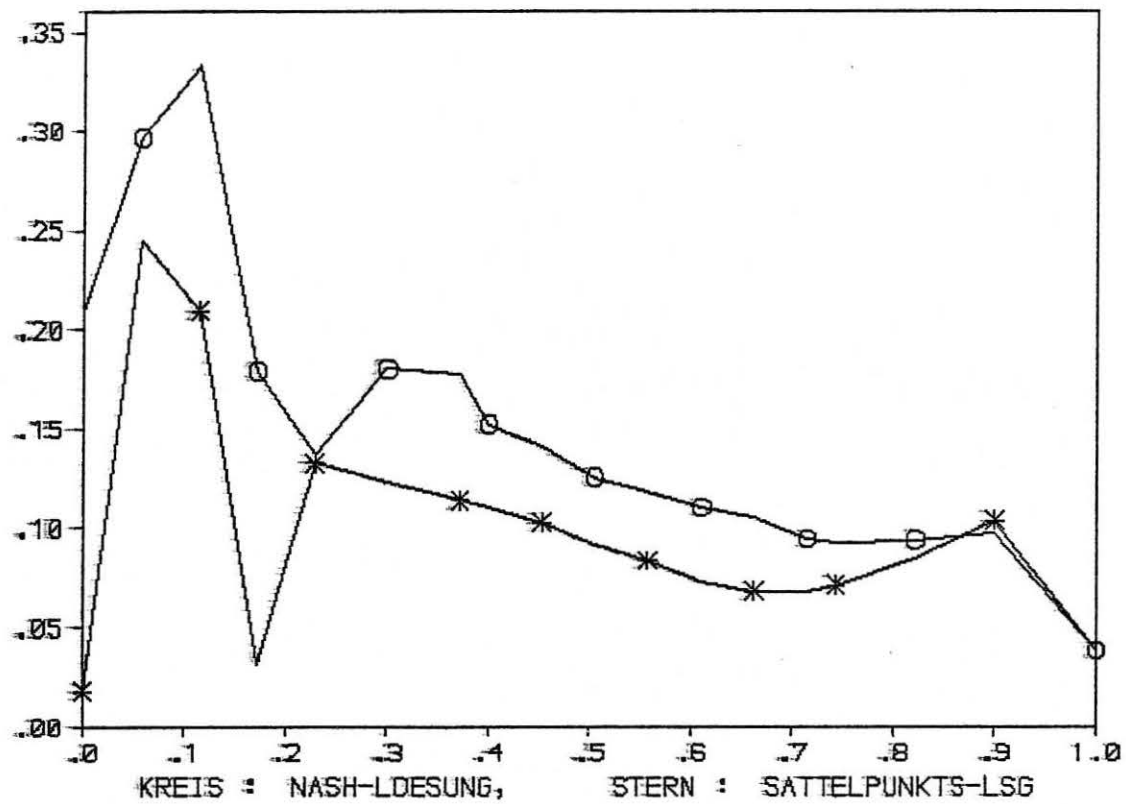




MY VS T

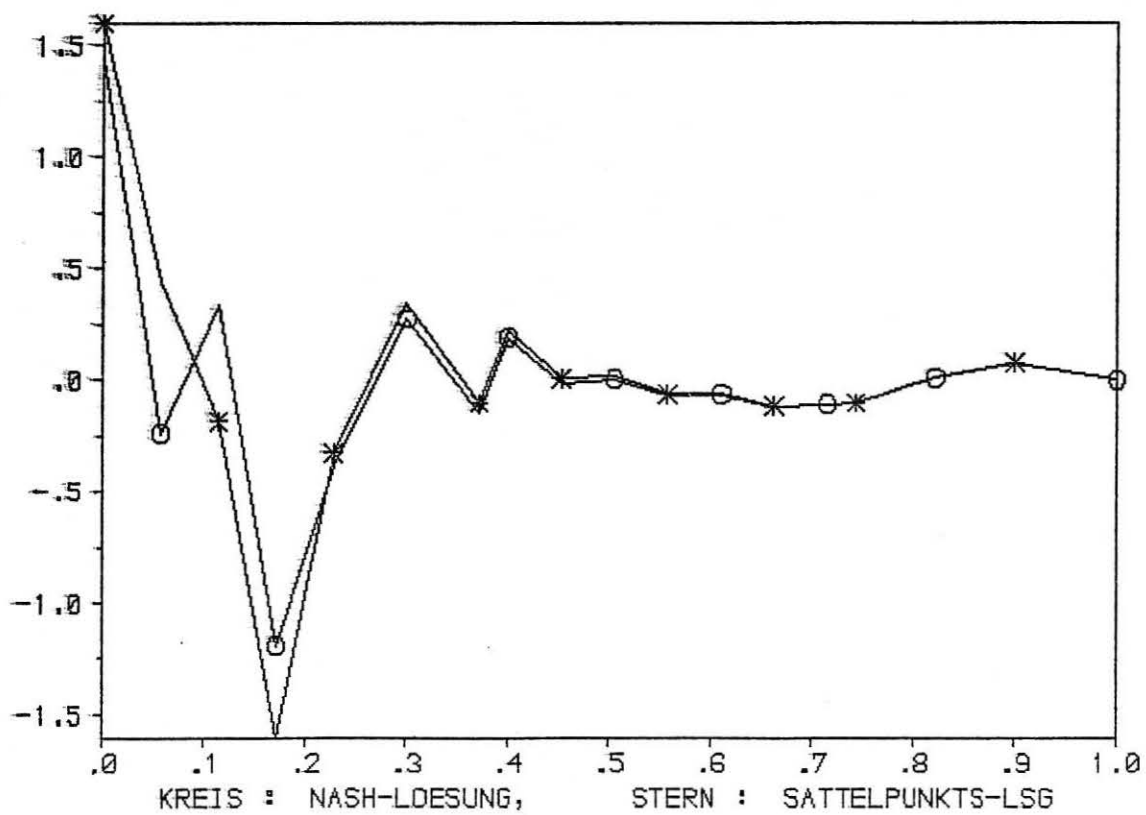


ALPHA VS T (A1)



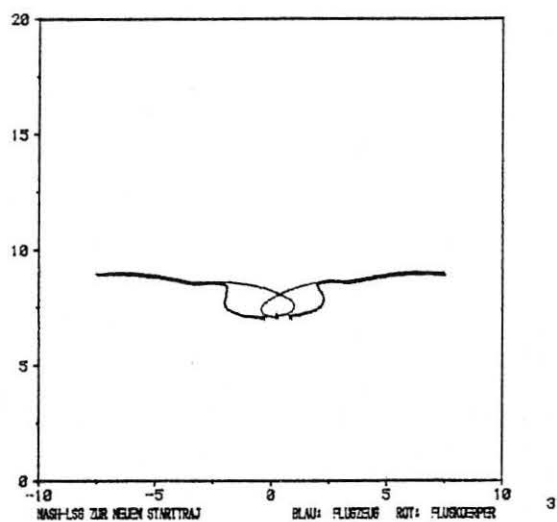
1

PW VS T (A1)

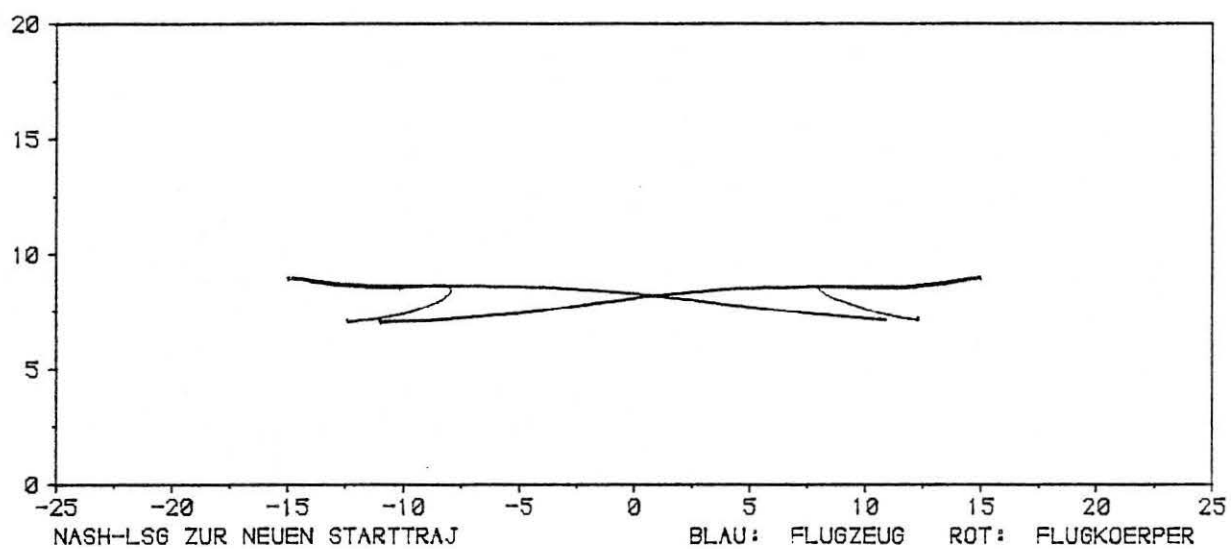


3

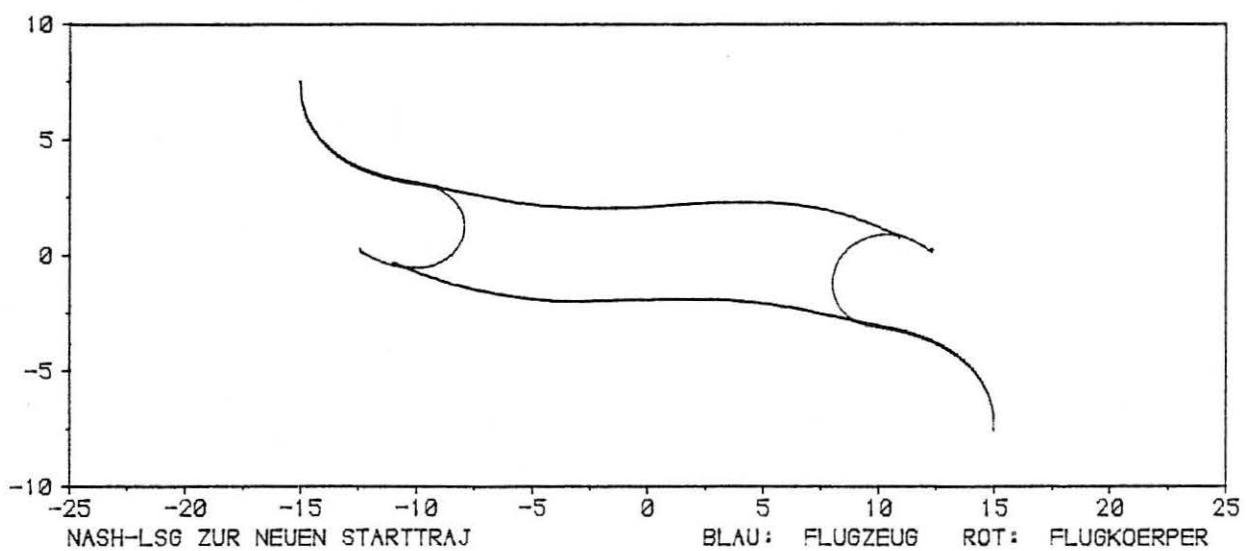
H VS Y



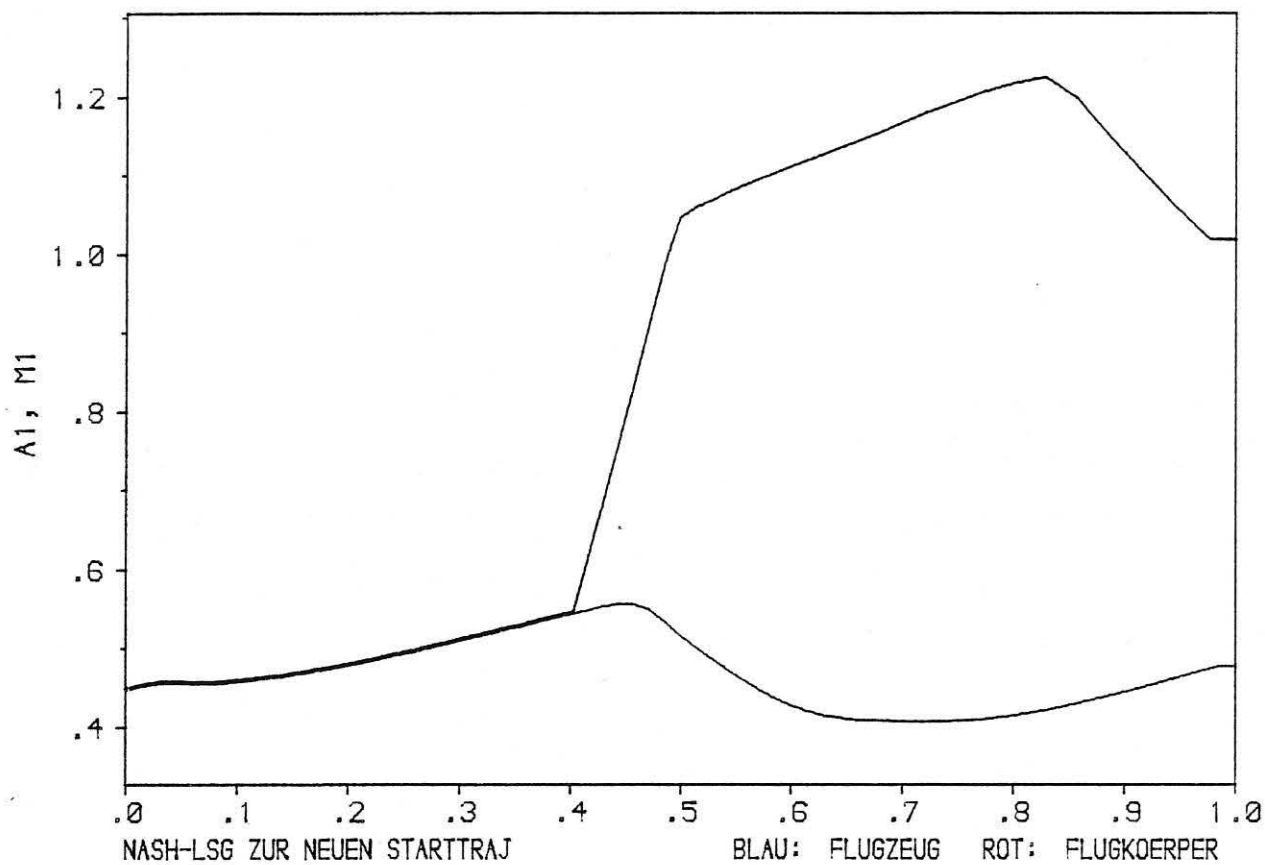
H VS X



Y VS X

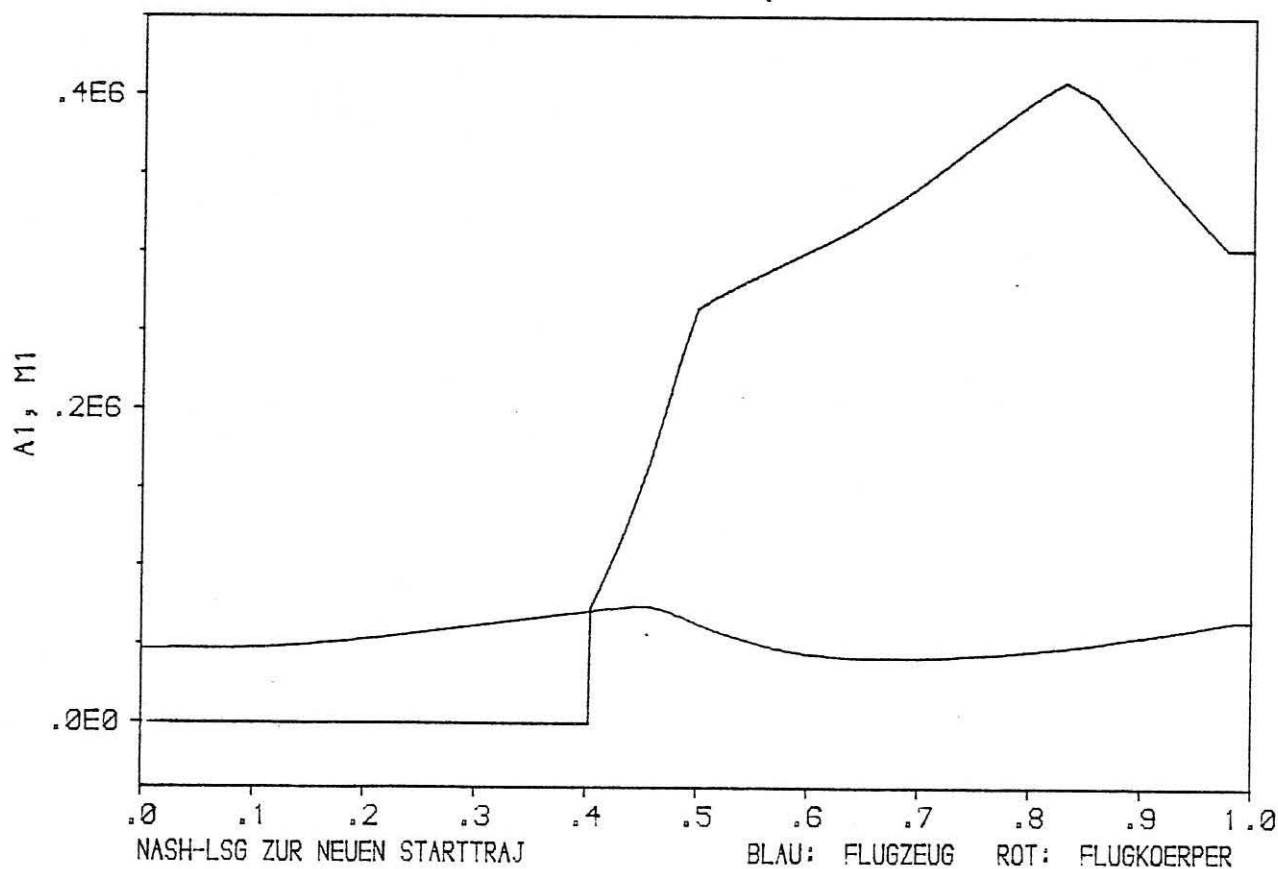


V VS T



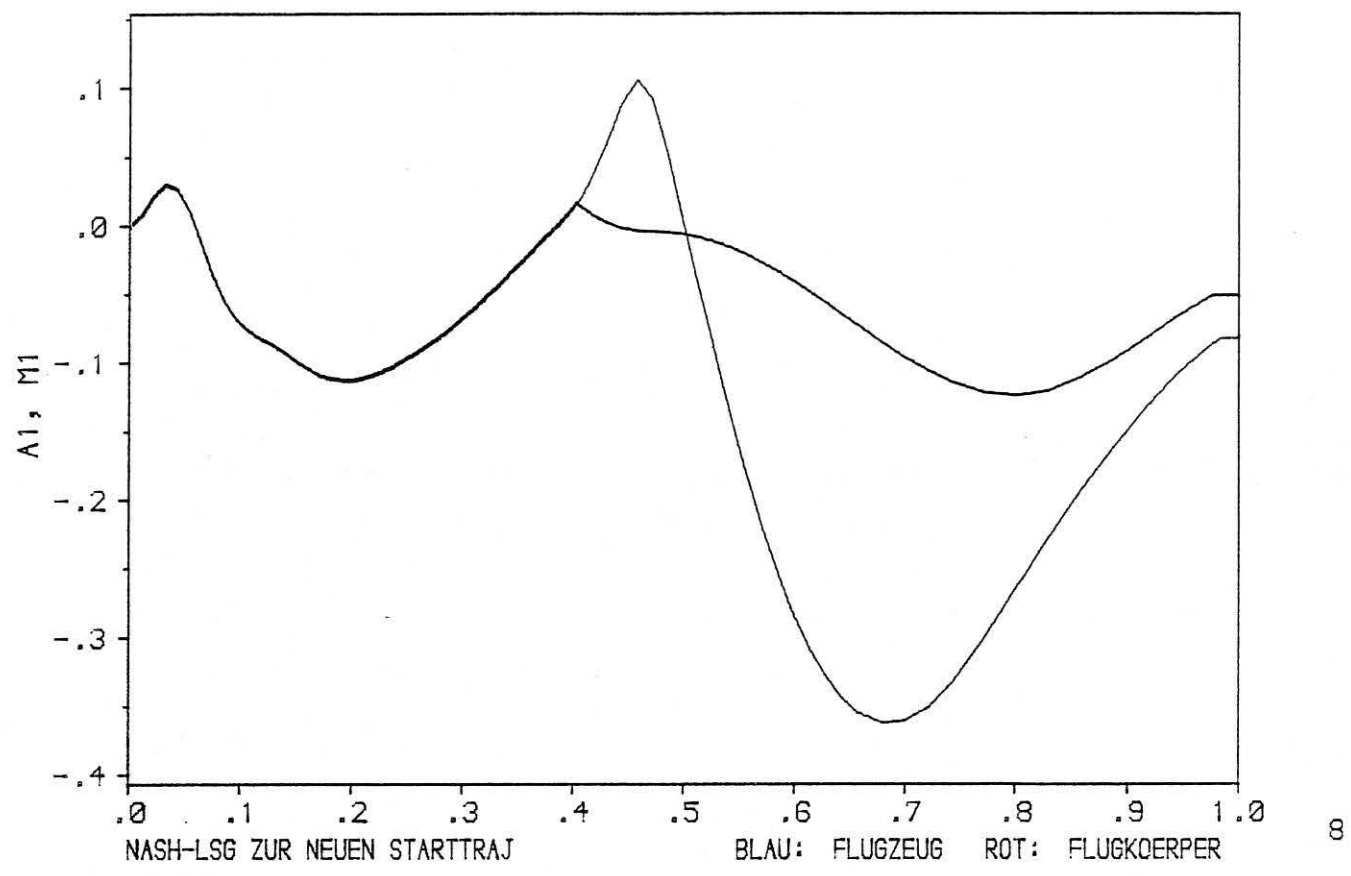
4

STAUDRUCK VS T

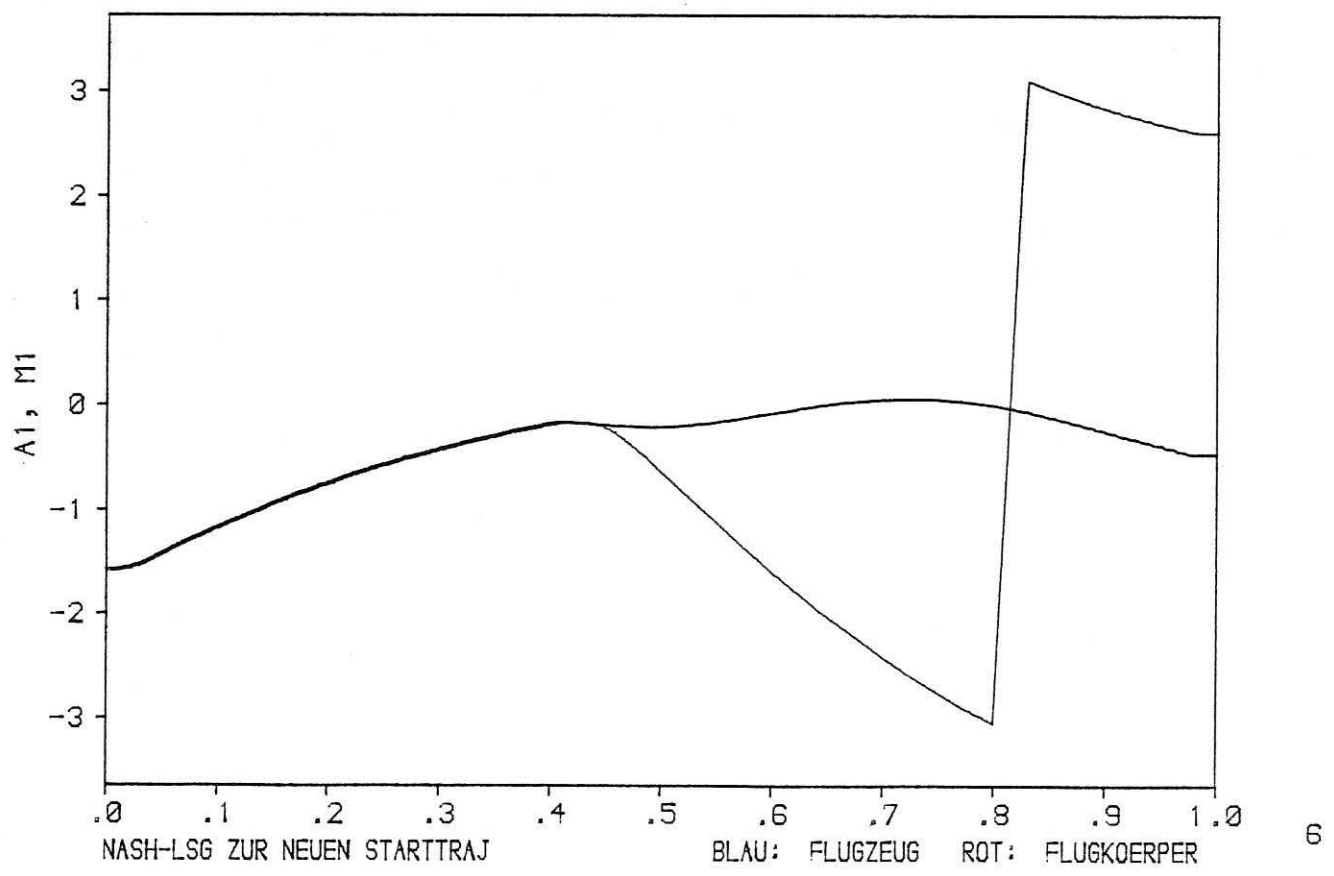


1

GAM VS T

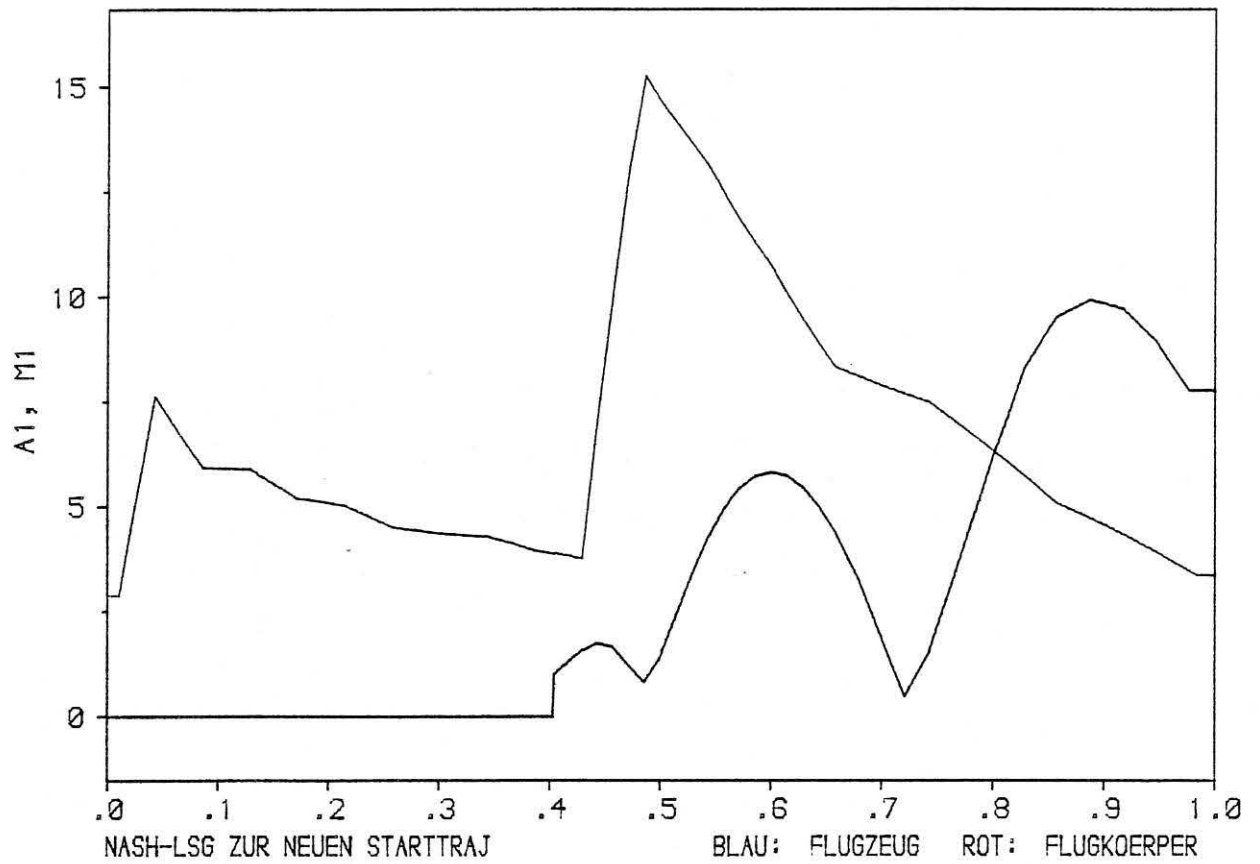


CHI VS T

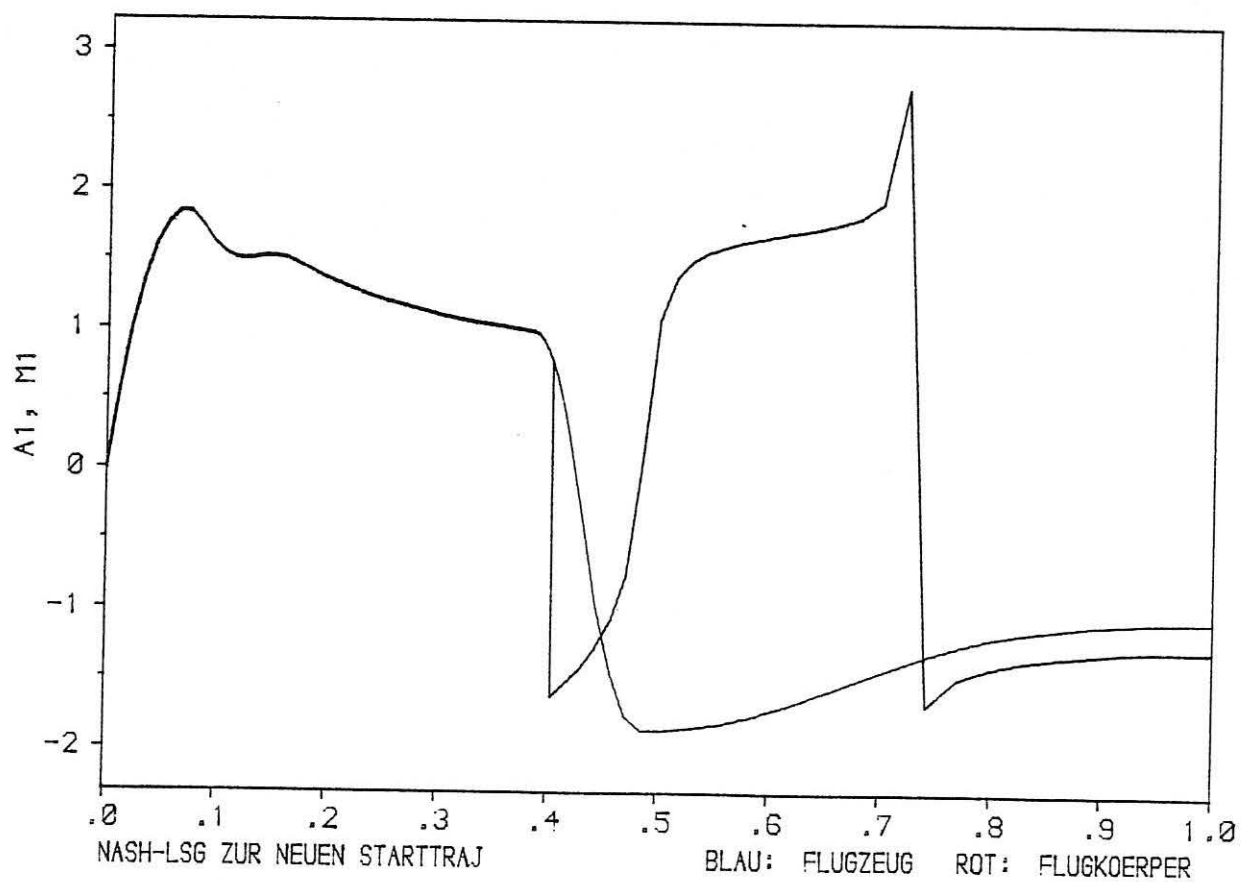


LASTVIELF VS T

I.3.d



MY VS T



II.1.a

YT , YM

2000

4000

6000

0

0

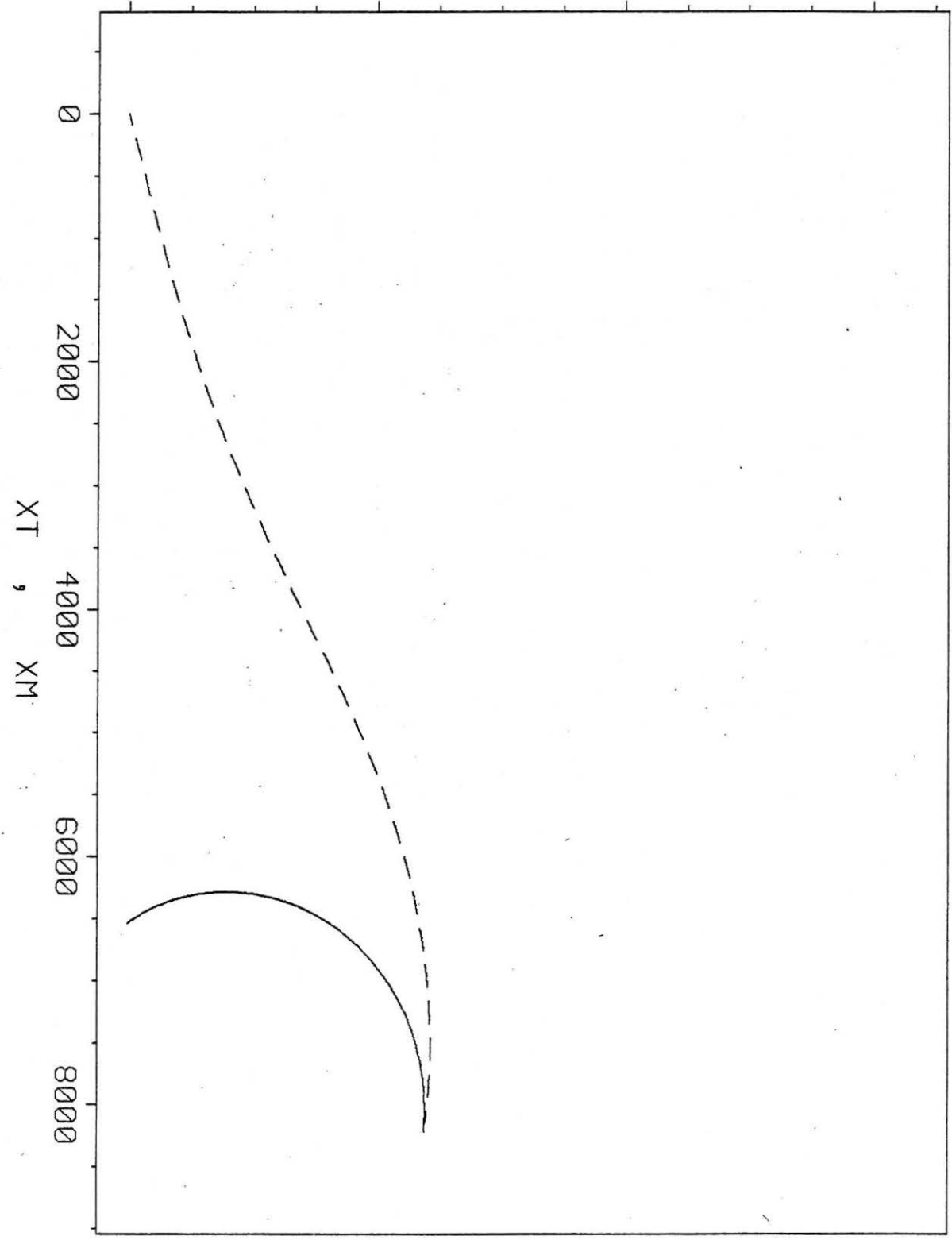
2000

4000

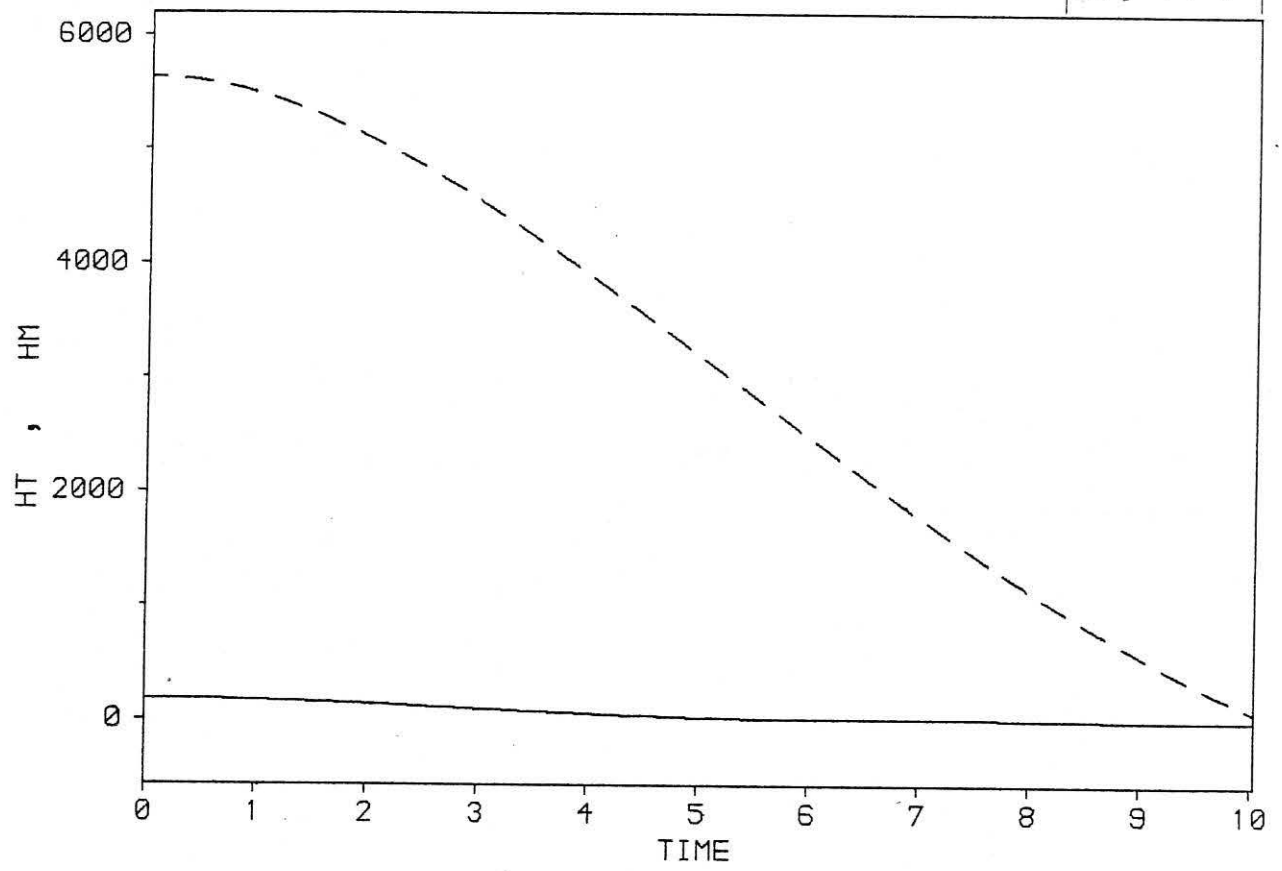
6000

8000

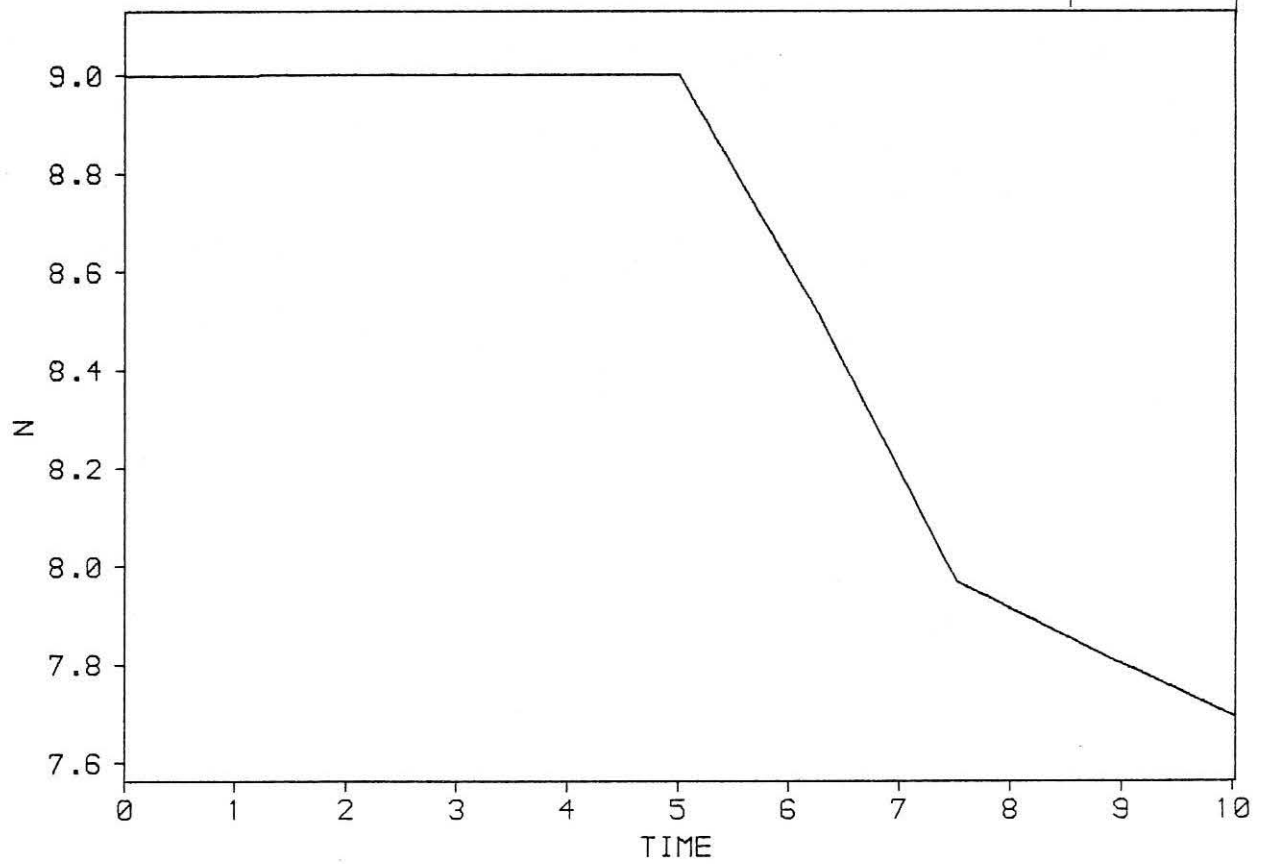
XT , XM



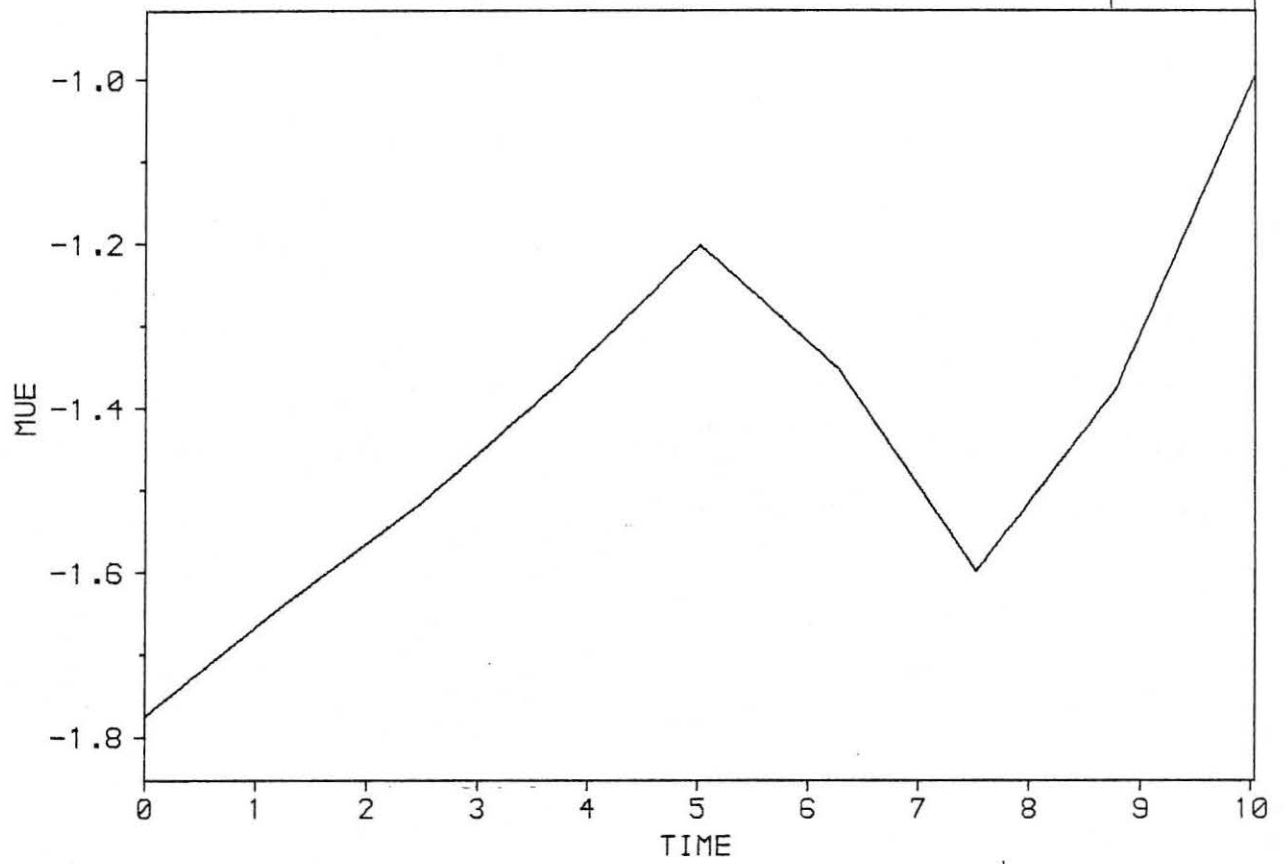
II.1.b



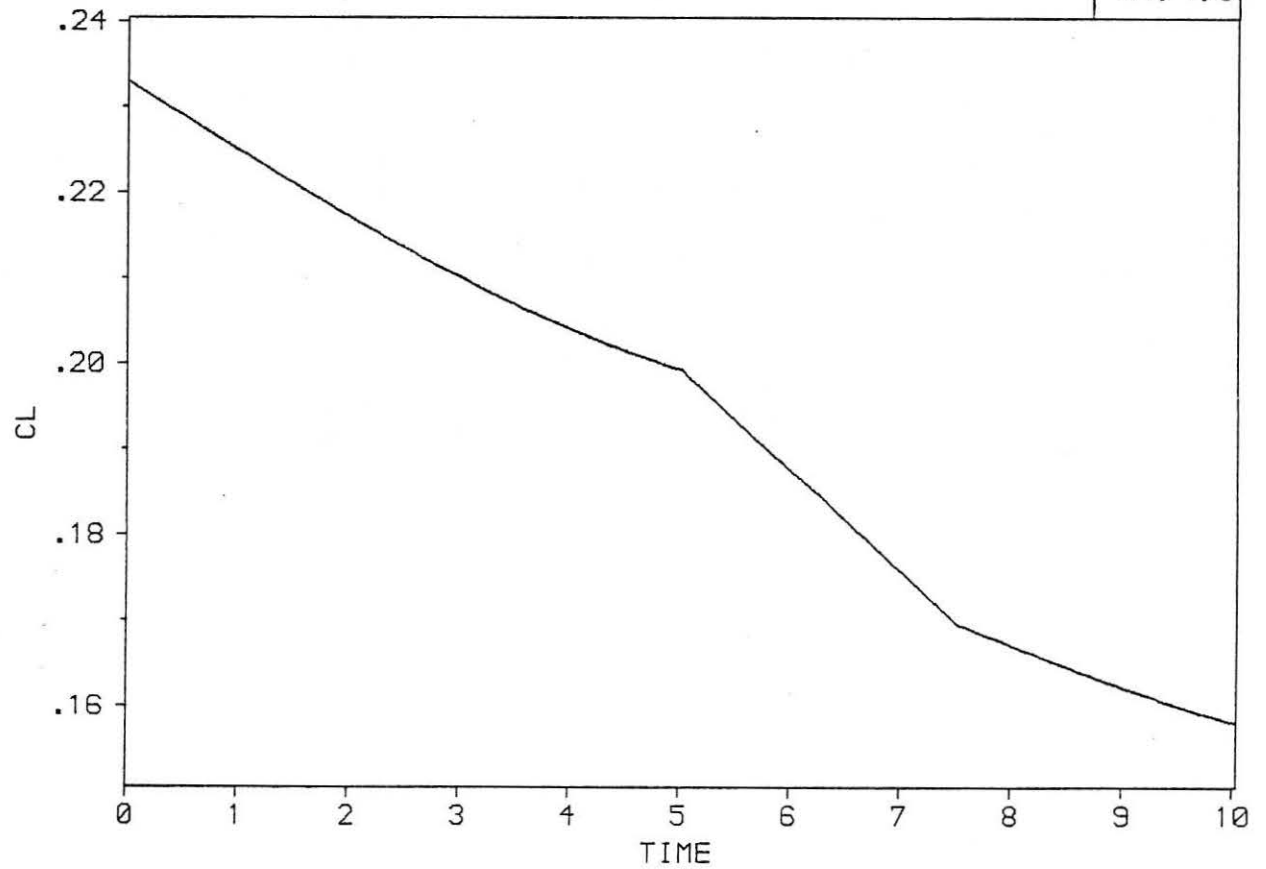
II.1.c



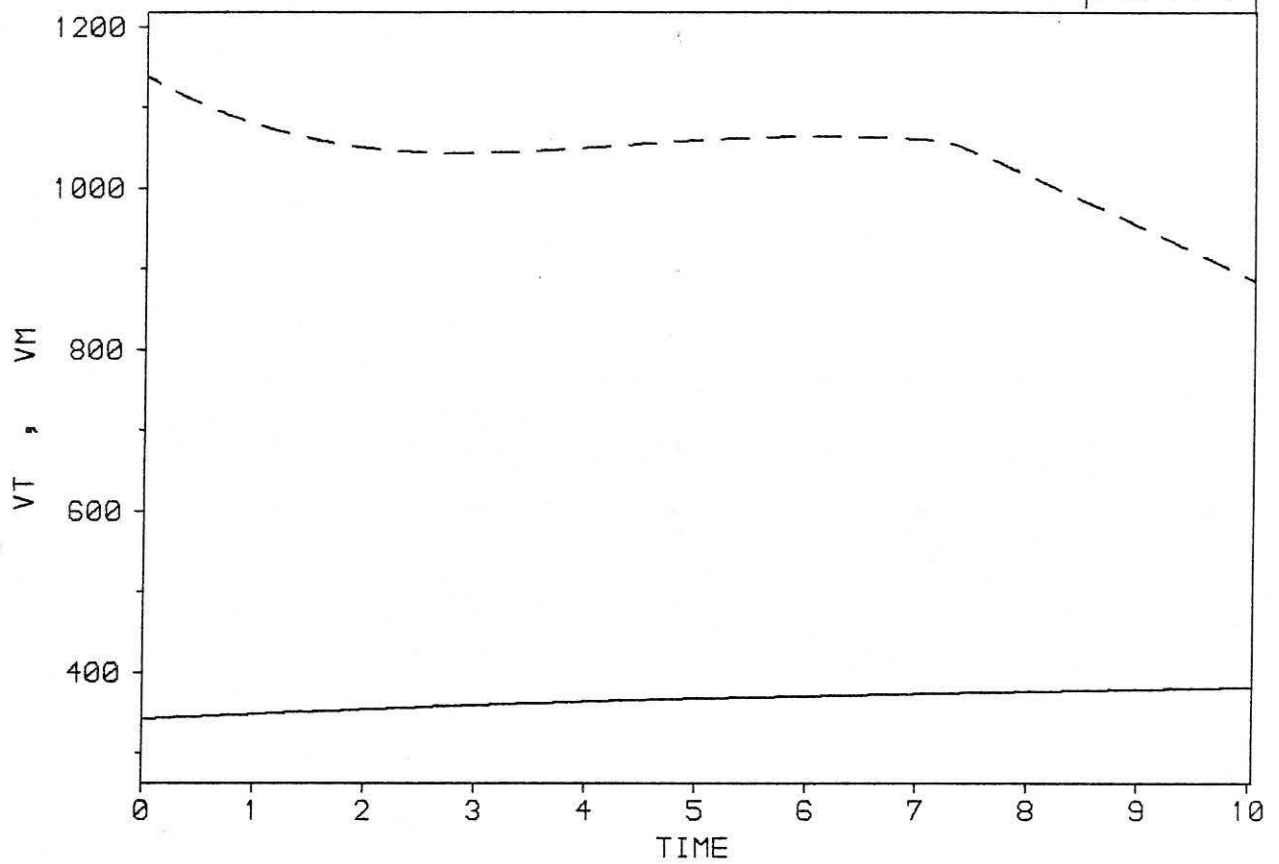
II.1.d



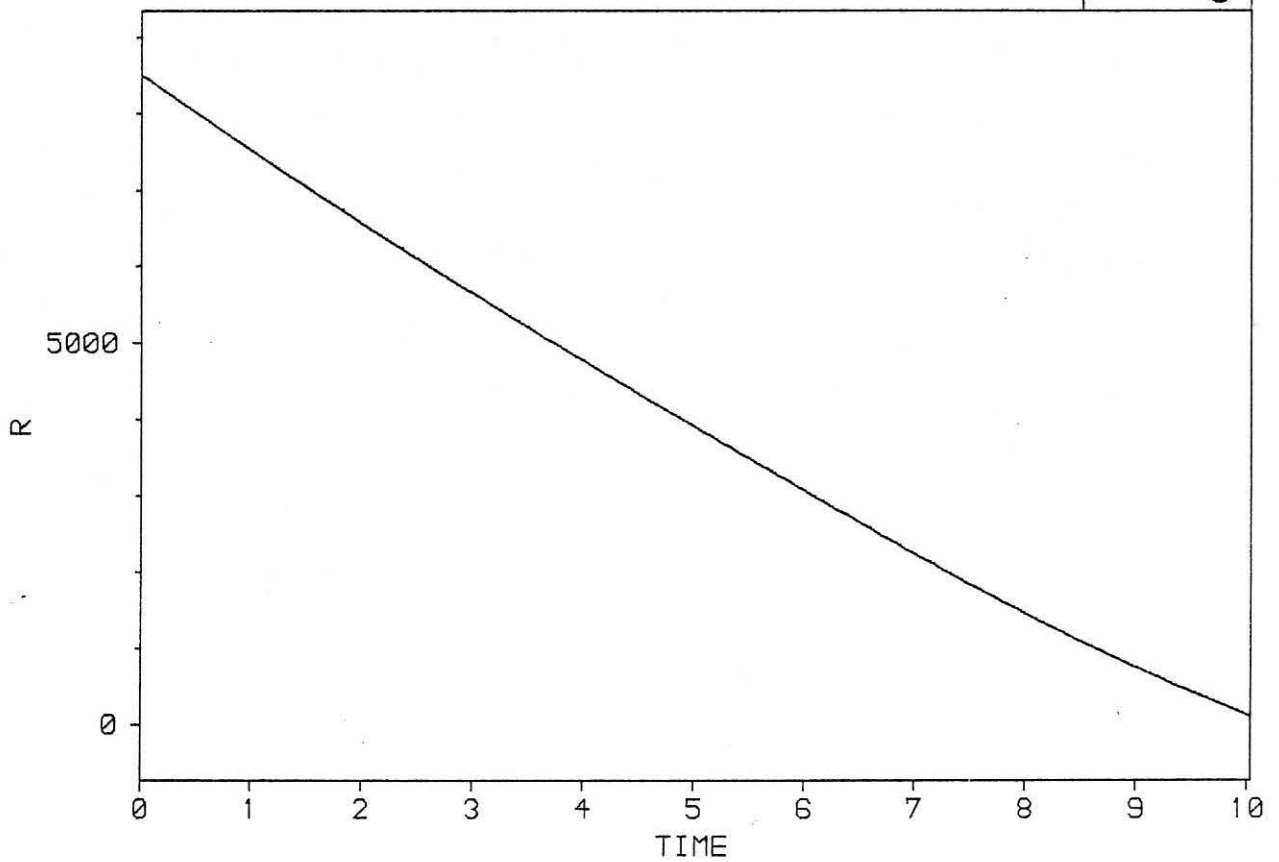
II.1.e



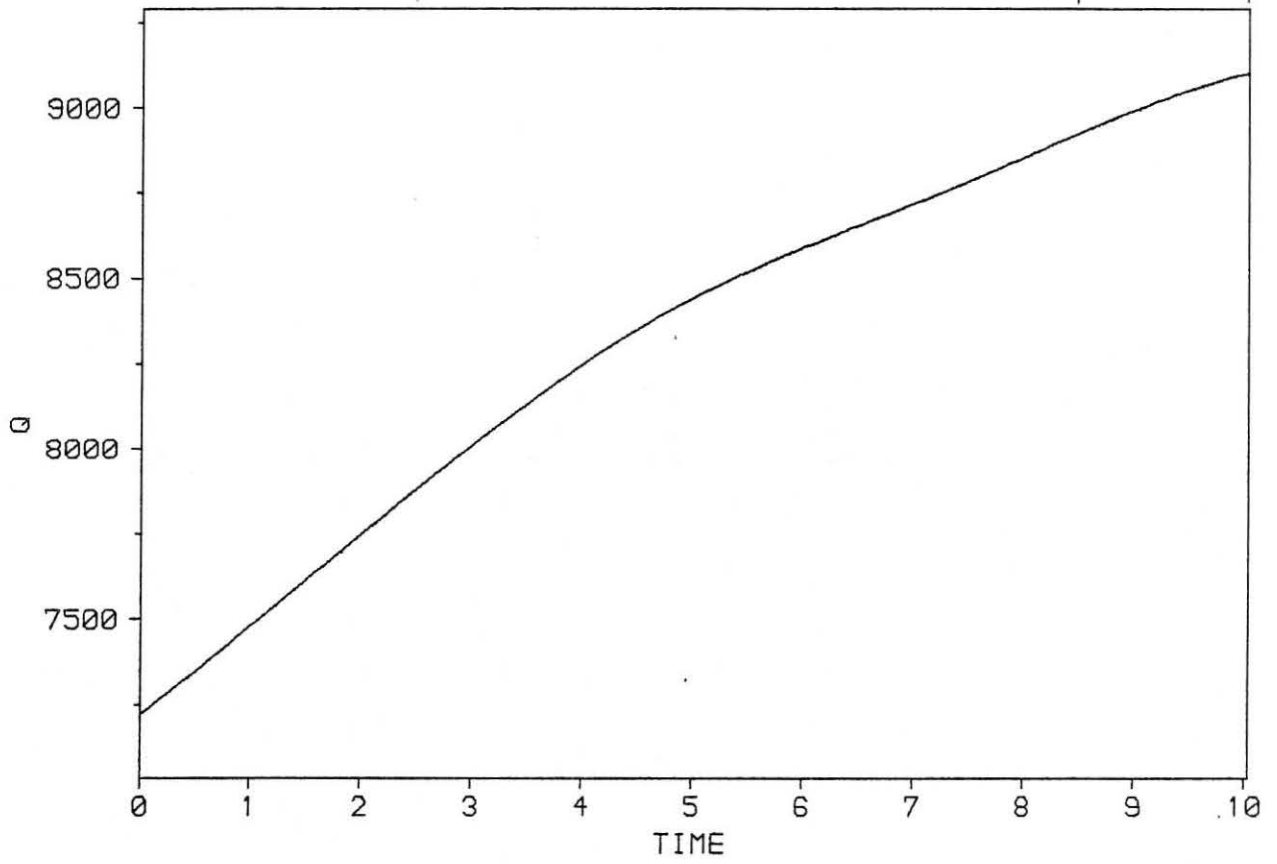
II.1.f



II.1.g

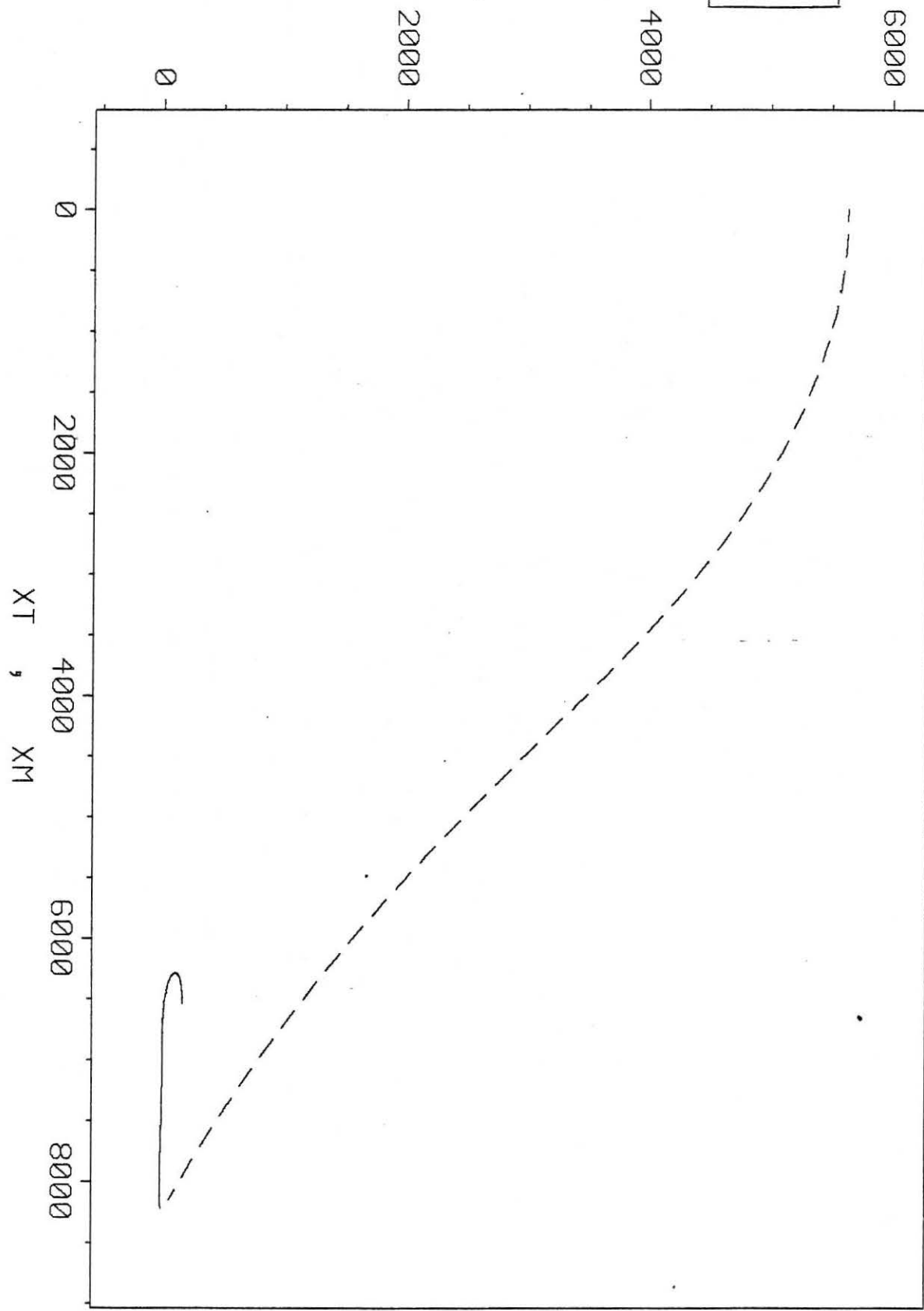


II.1.h



II,1.i

HM , HT



YT

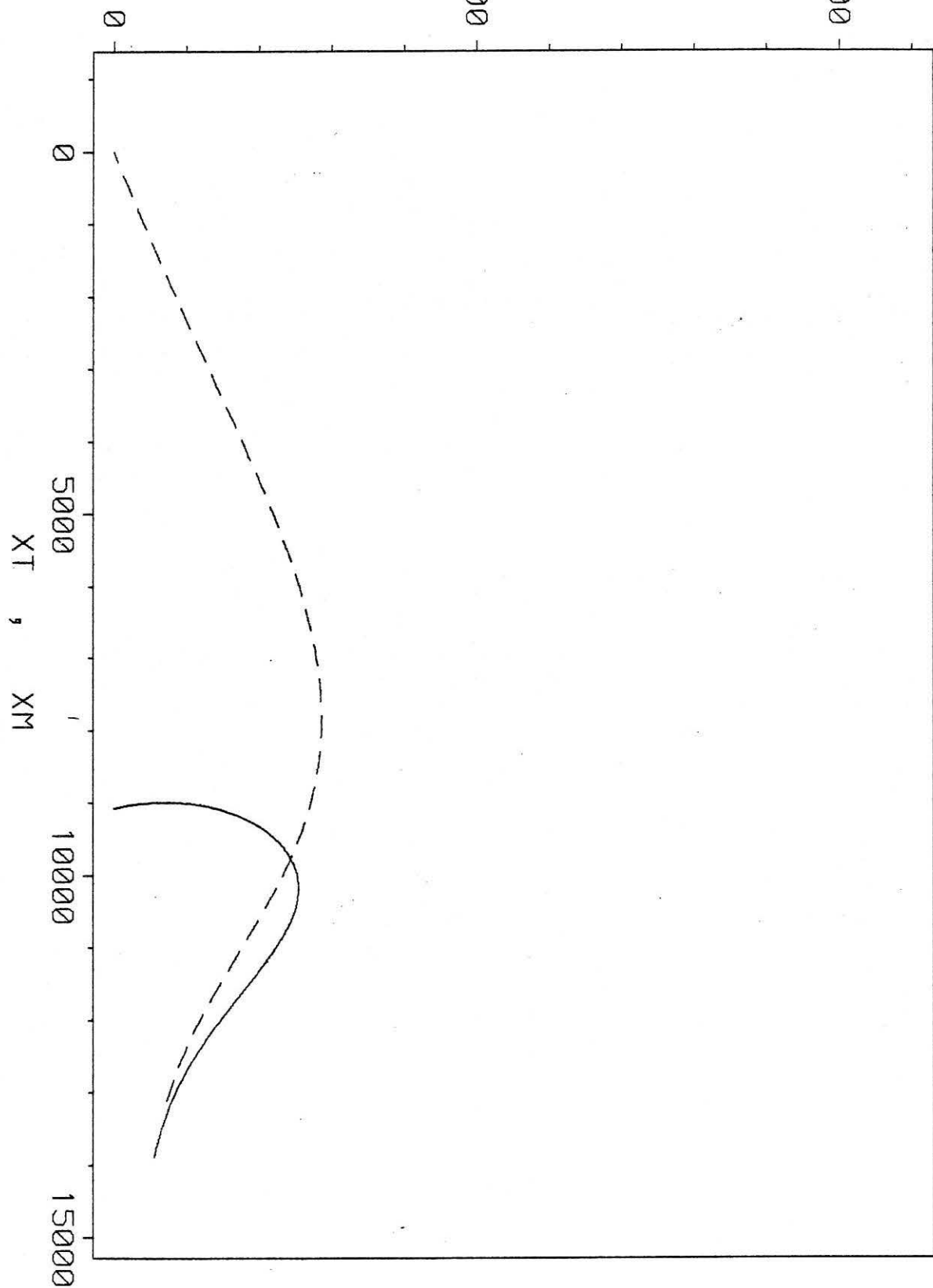
,

YM

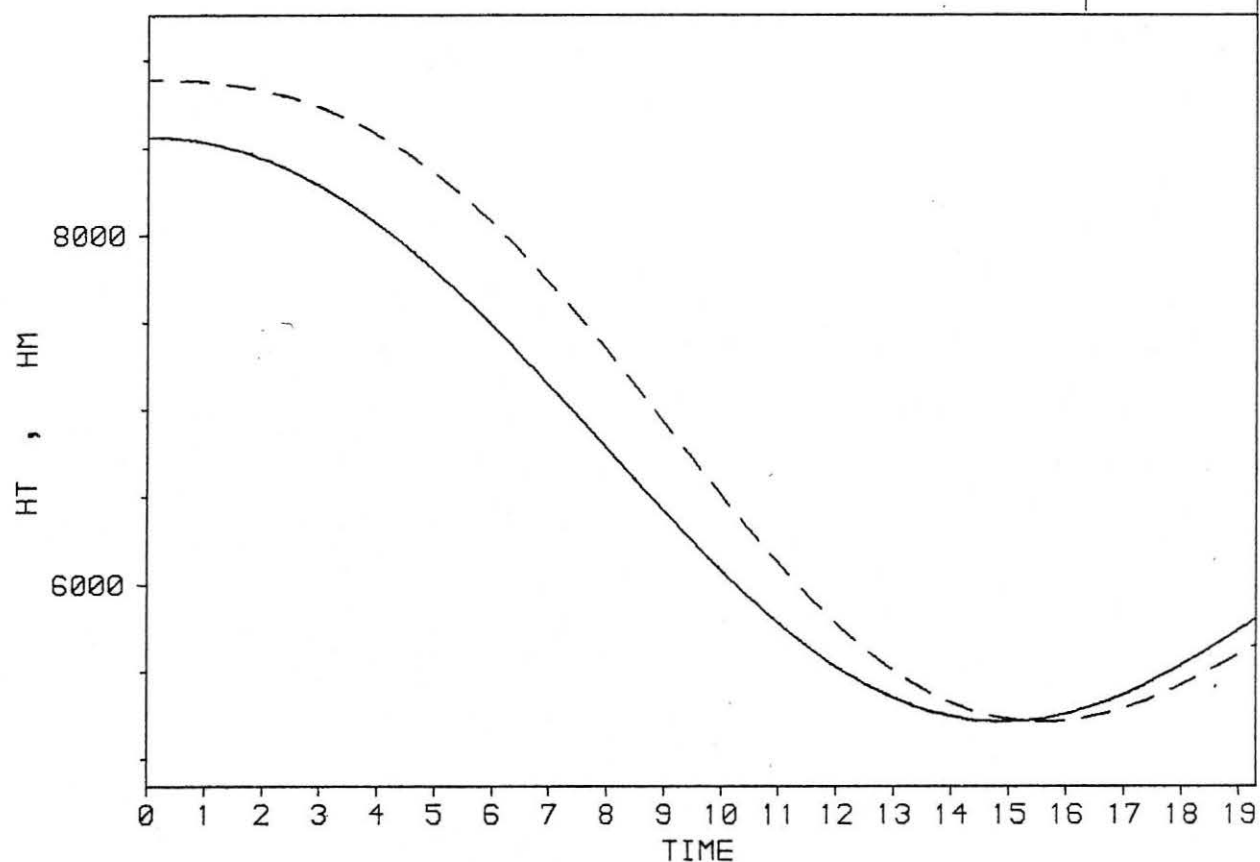
II.2.a

5000

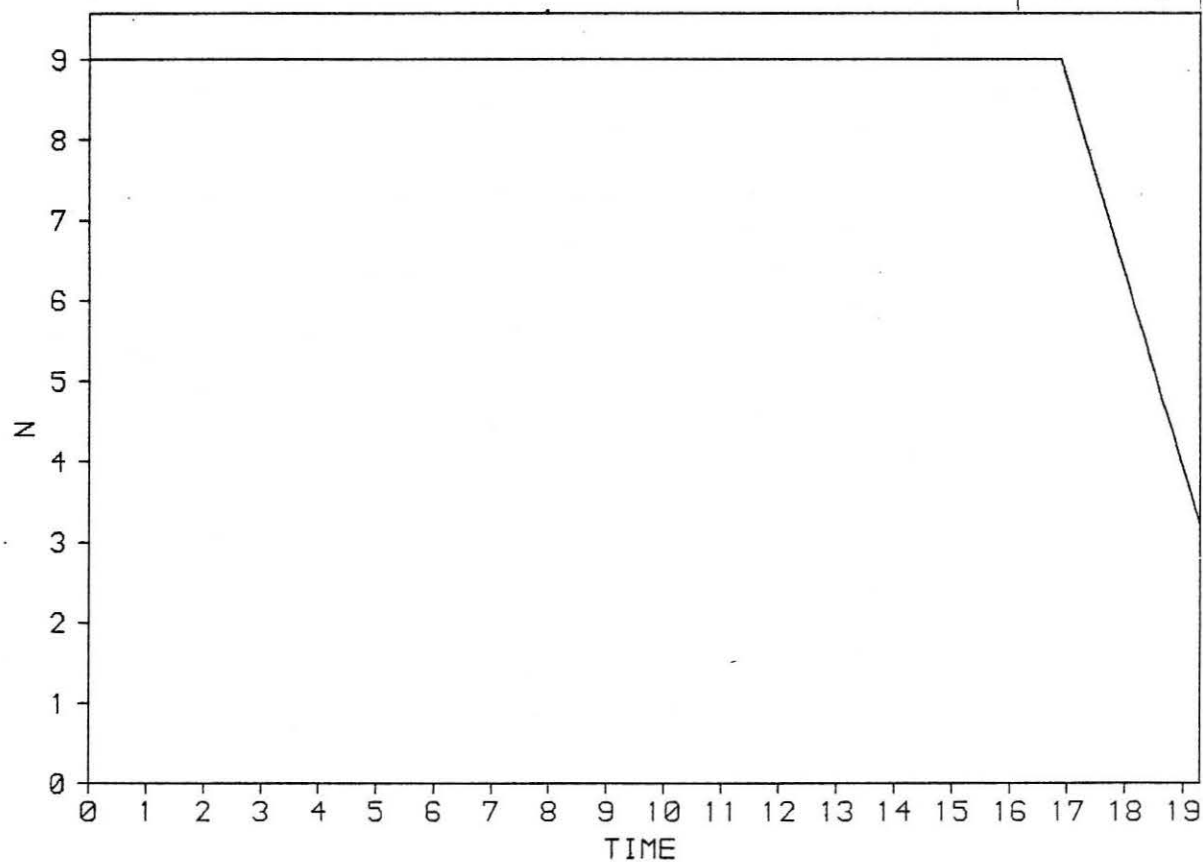
10000



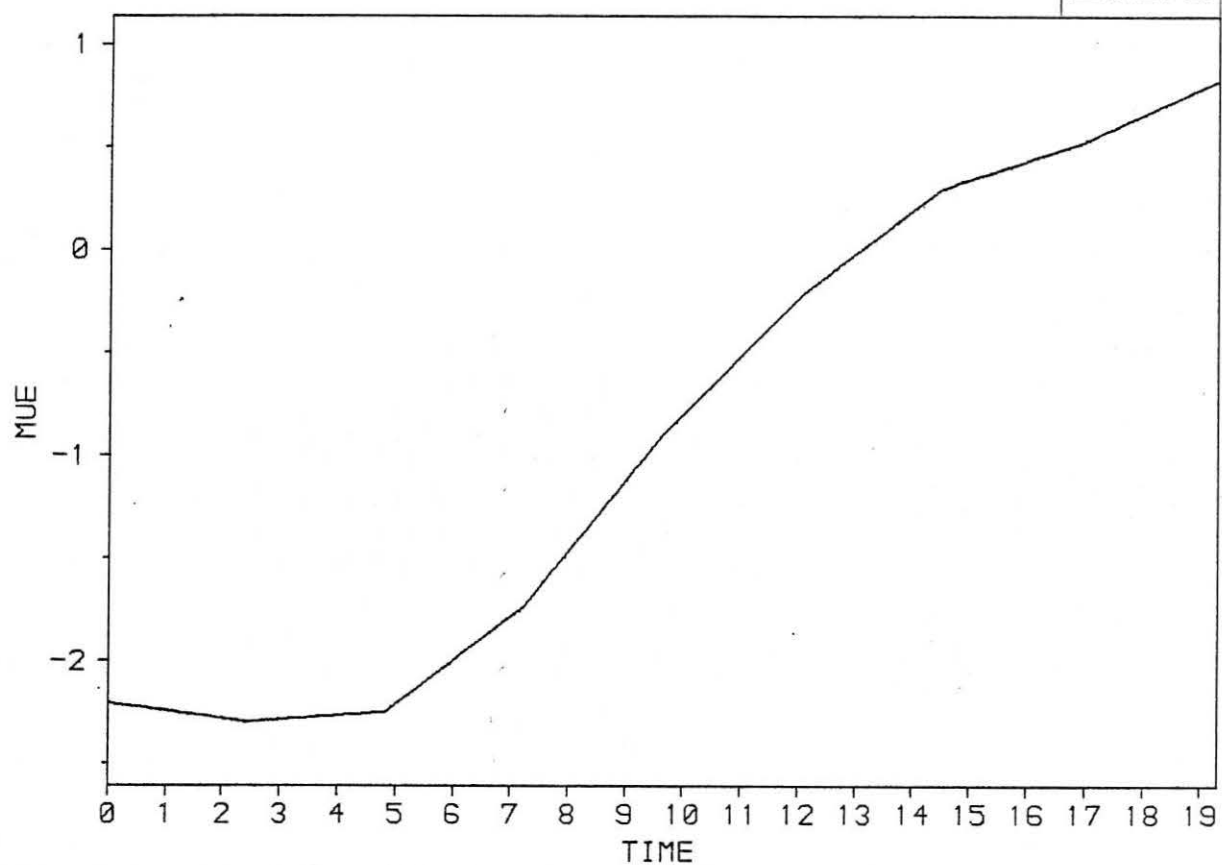
II.2.b



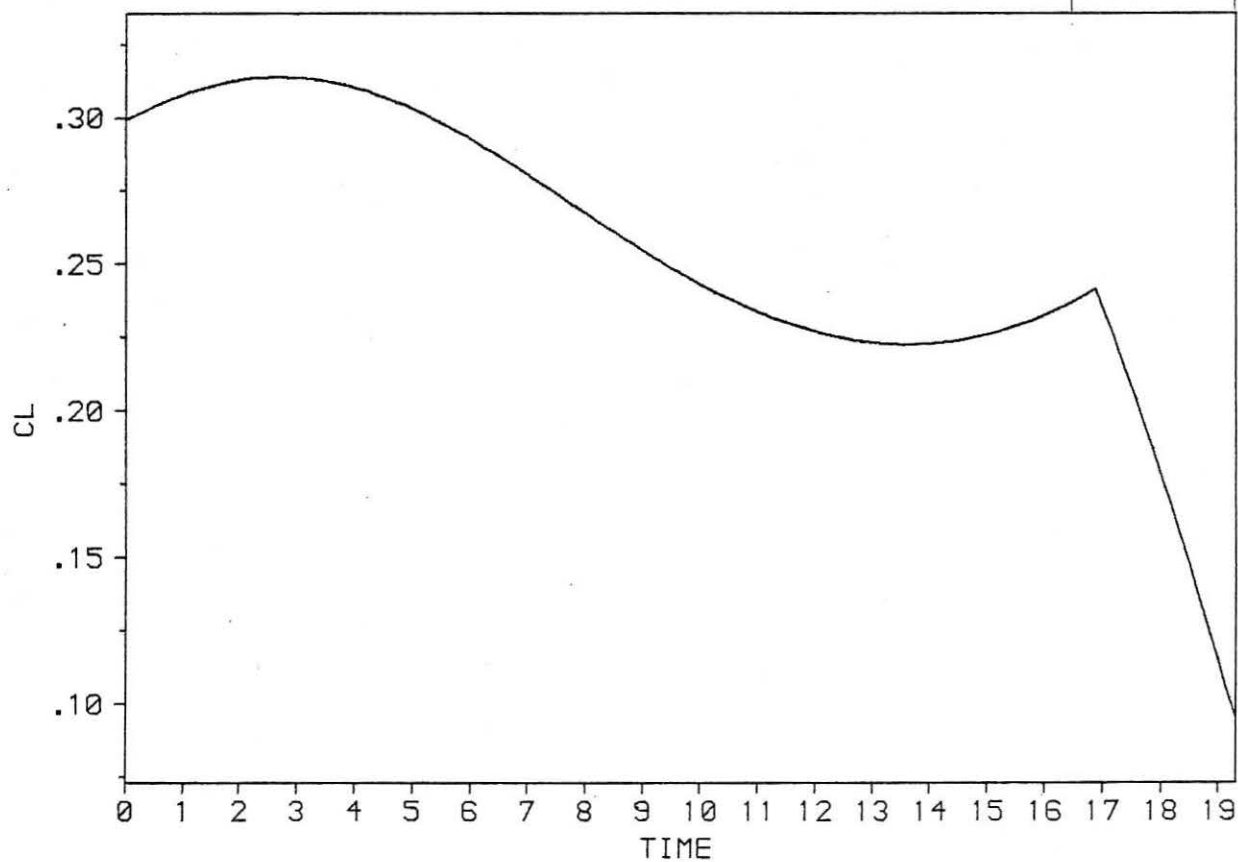
II.2.c



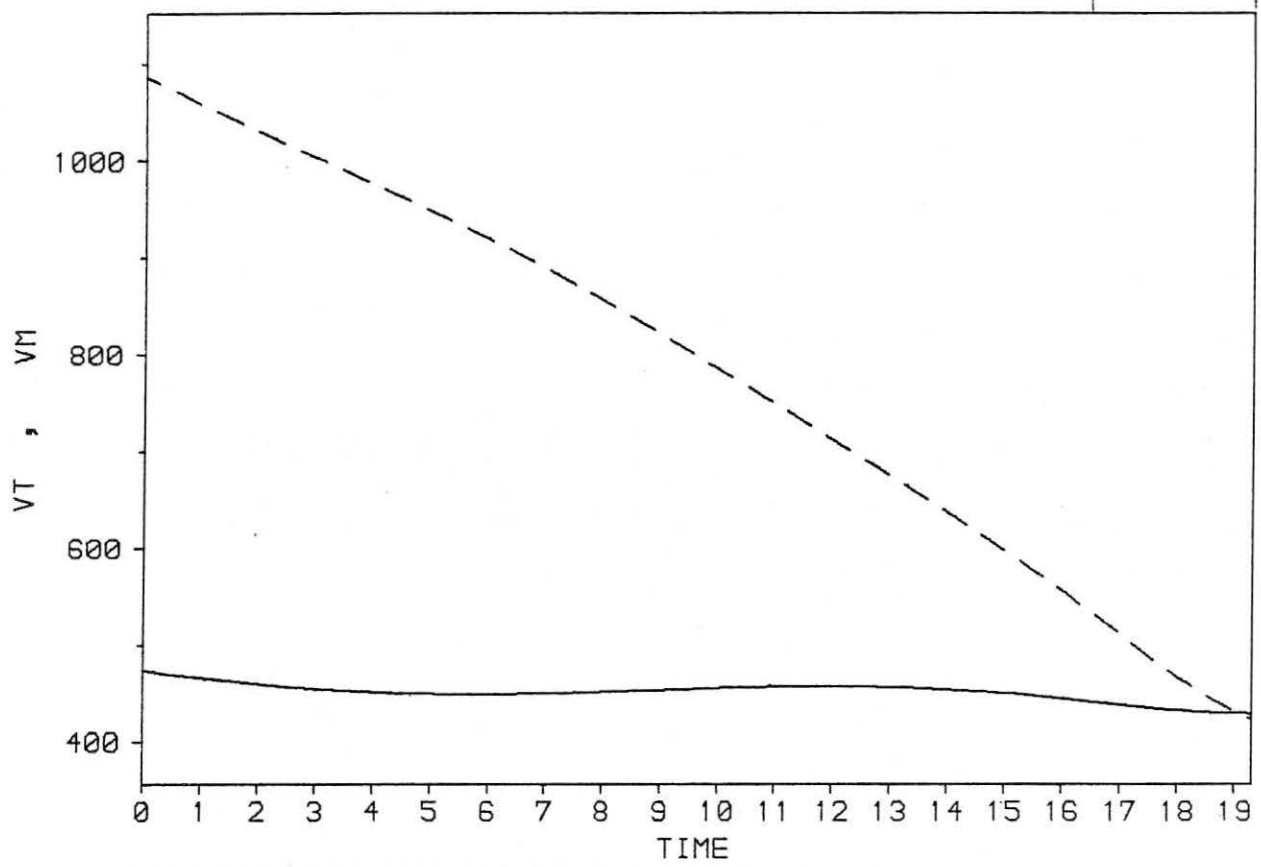
II.2.d



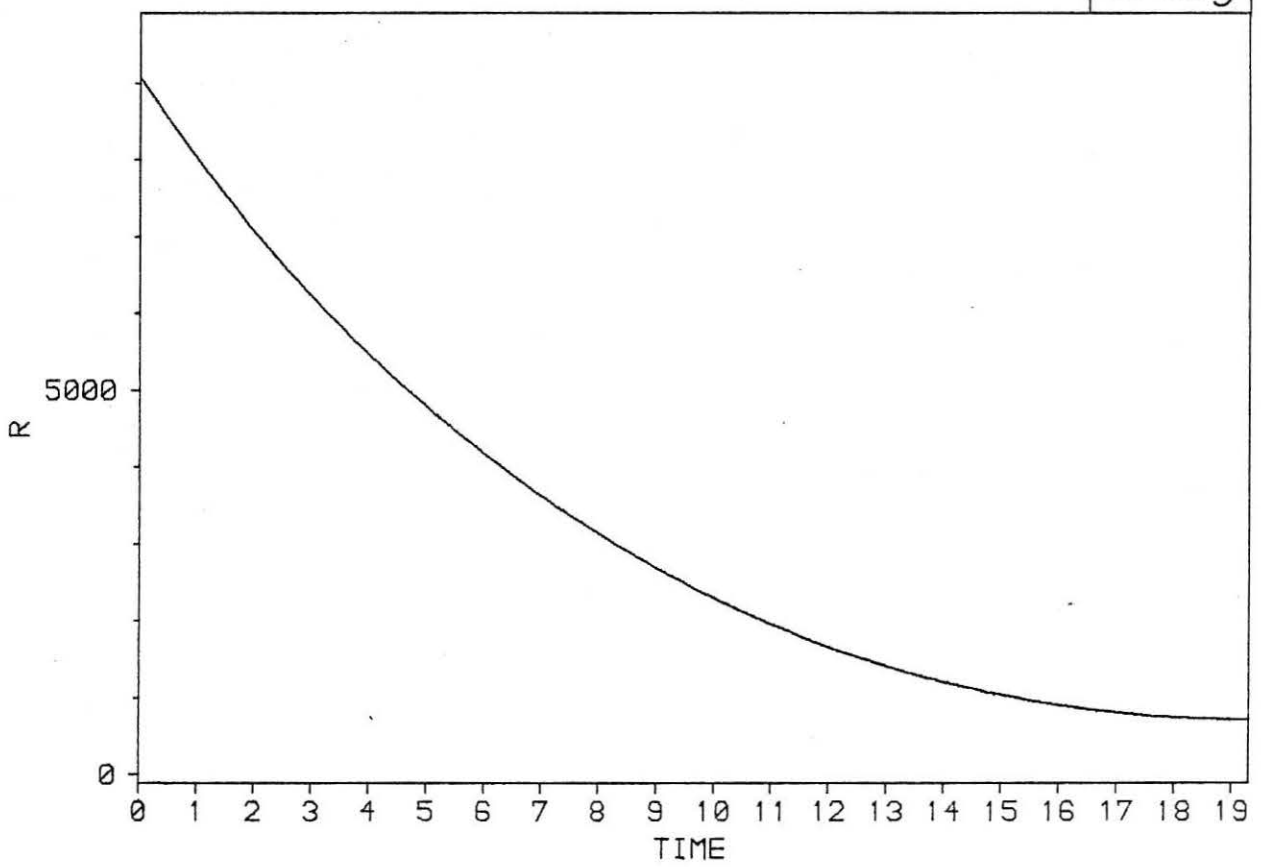
II.2.e



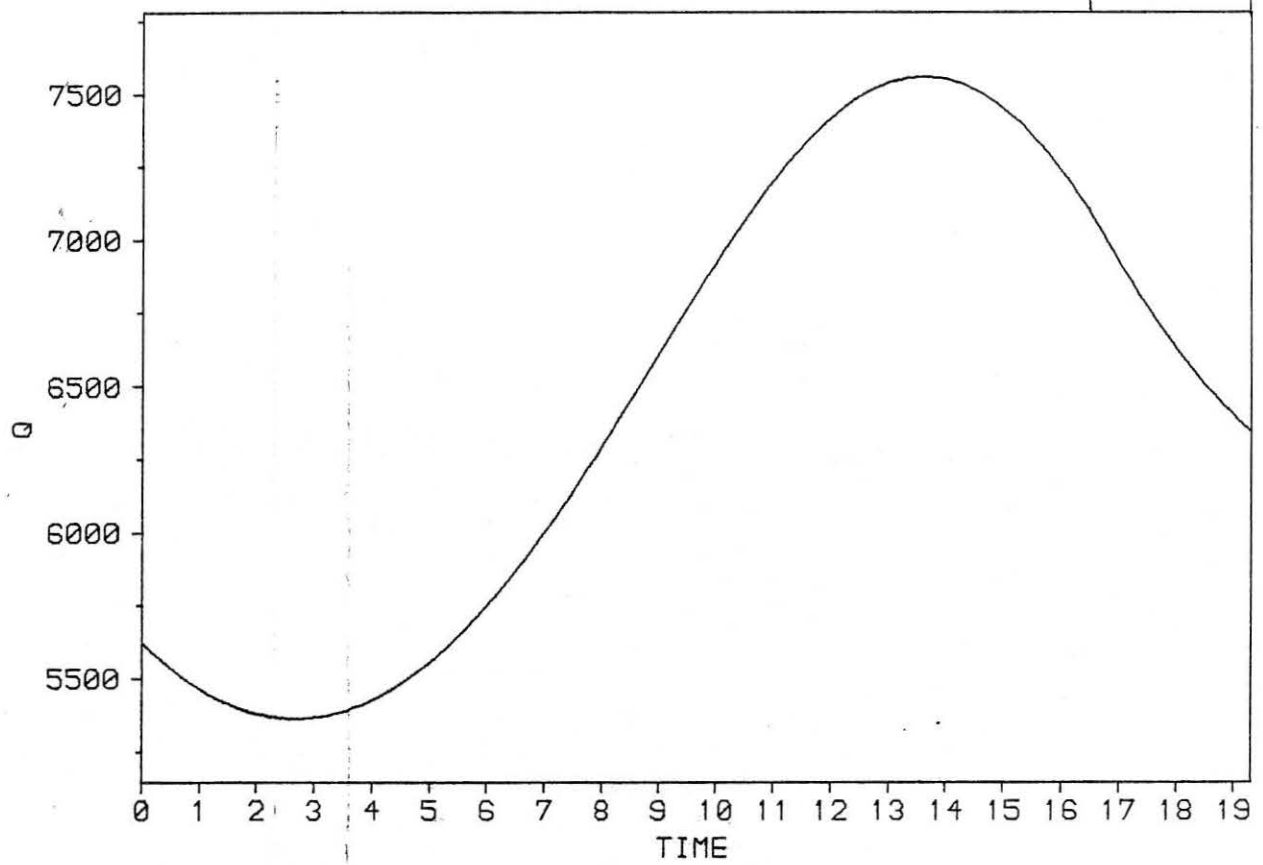
II.2.f



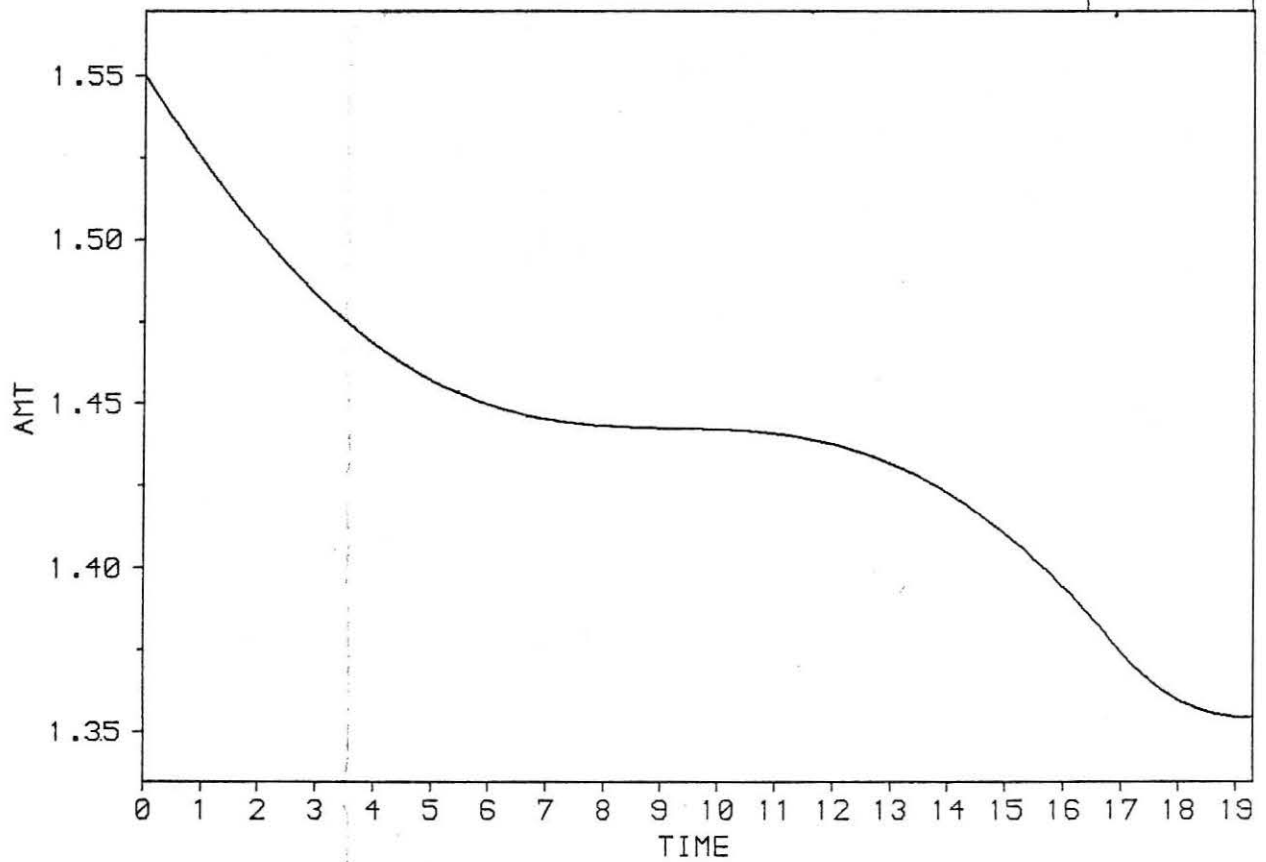
II.2.g

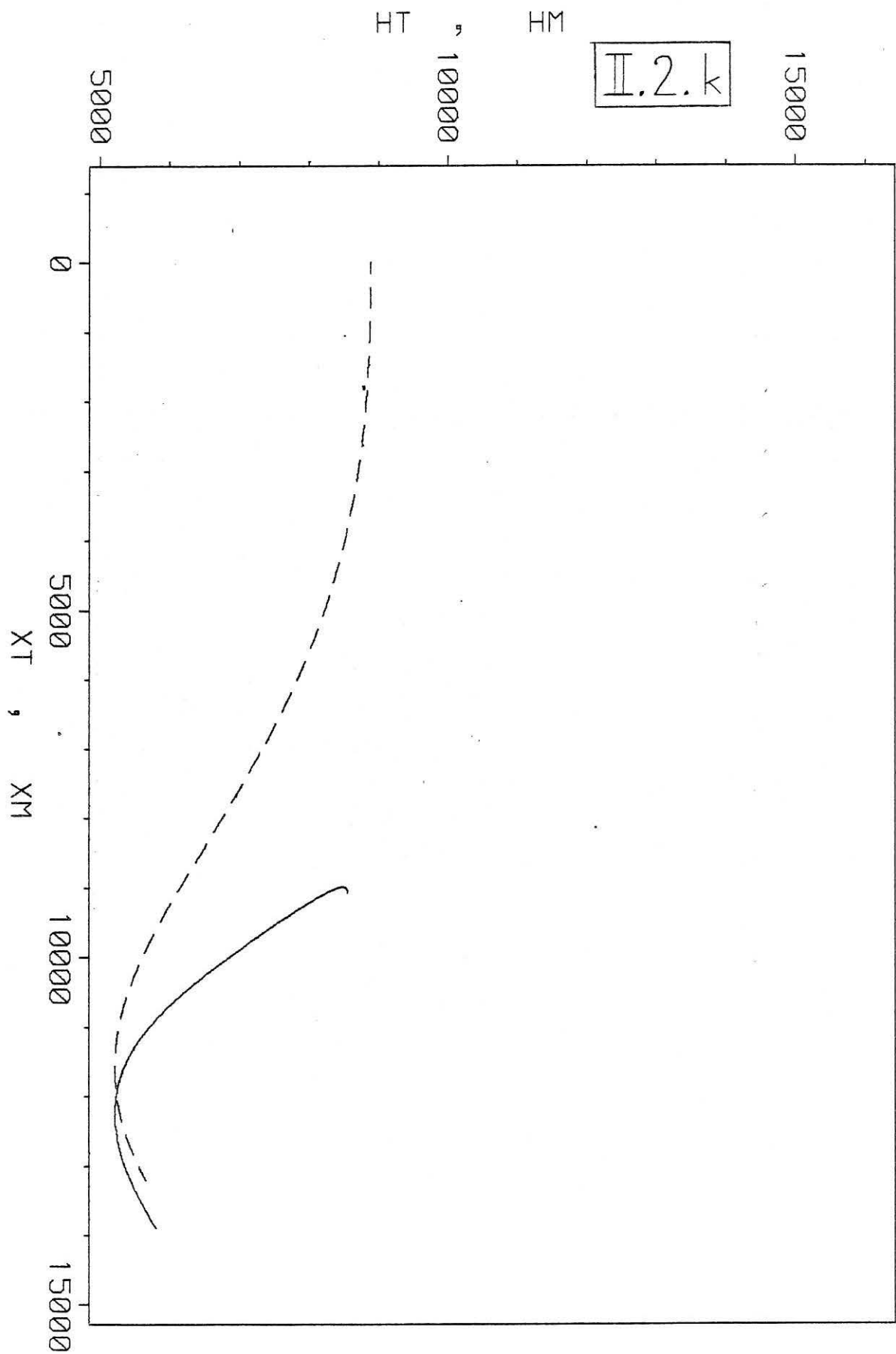


II.2.h



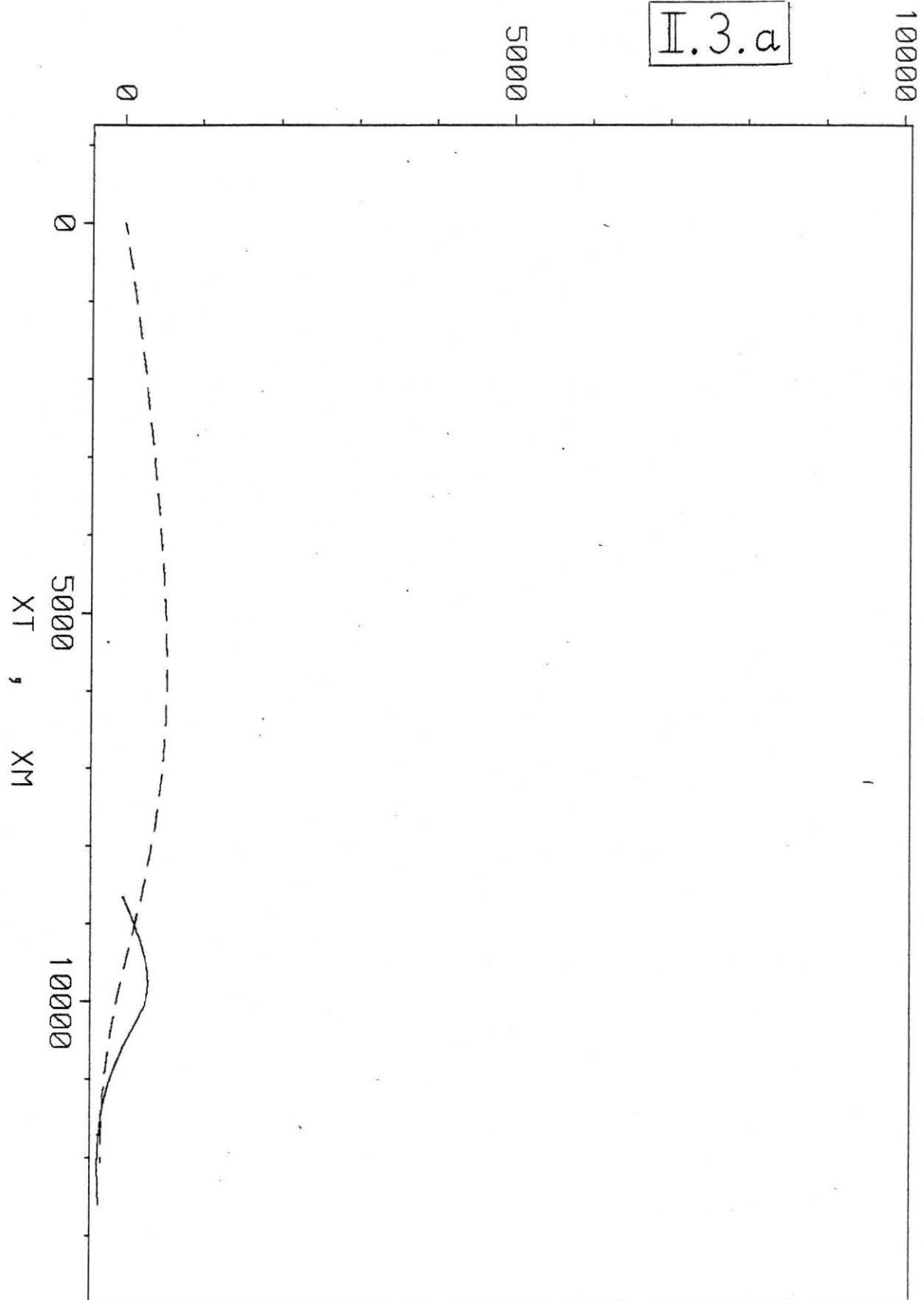
II.2.i



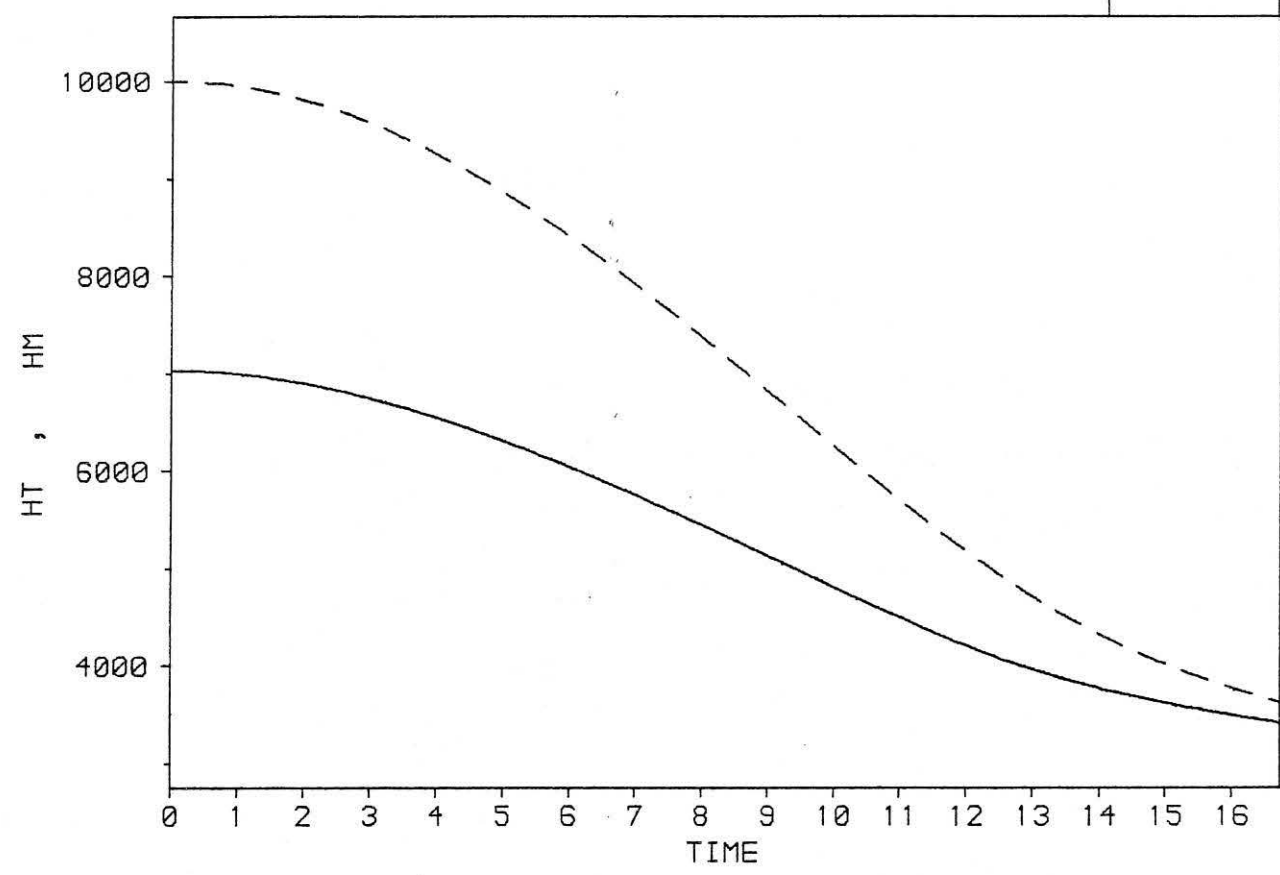


YT 5 YM

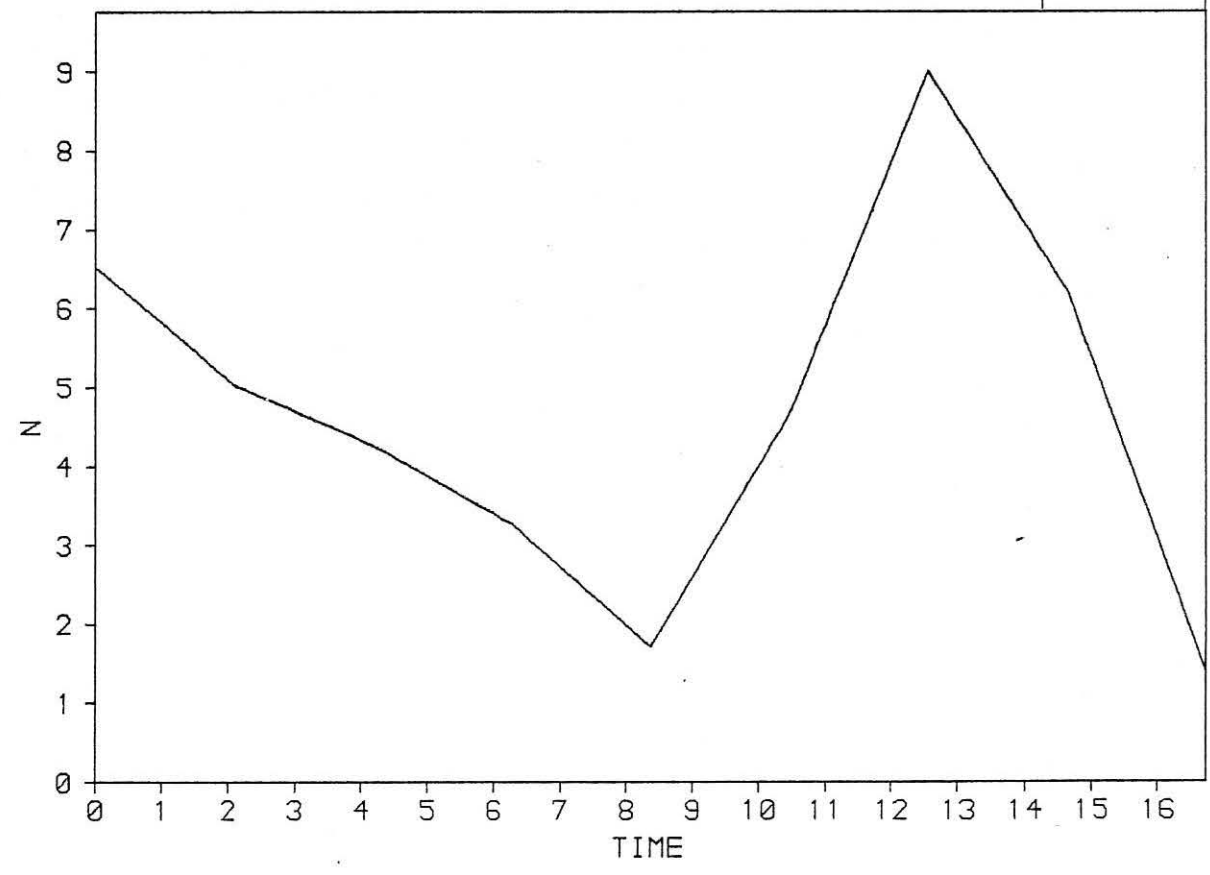
II.3.a



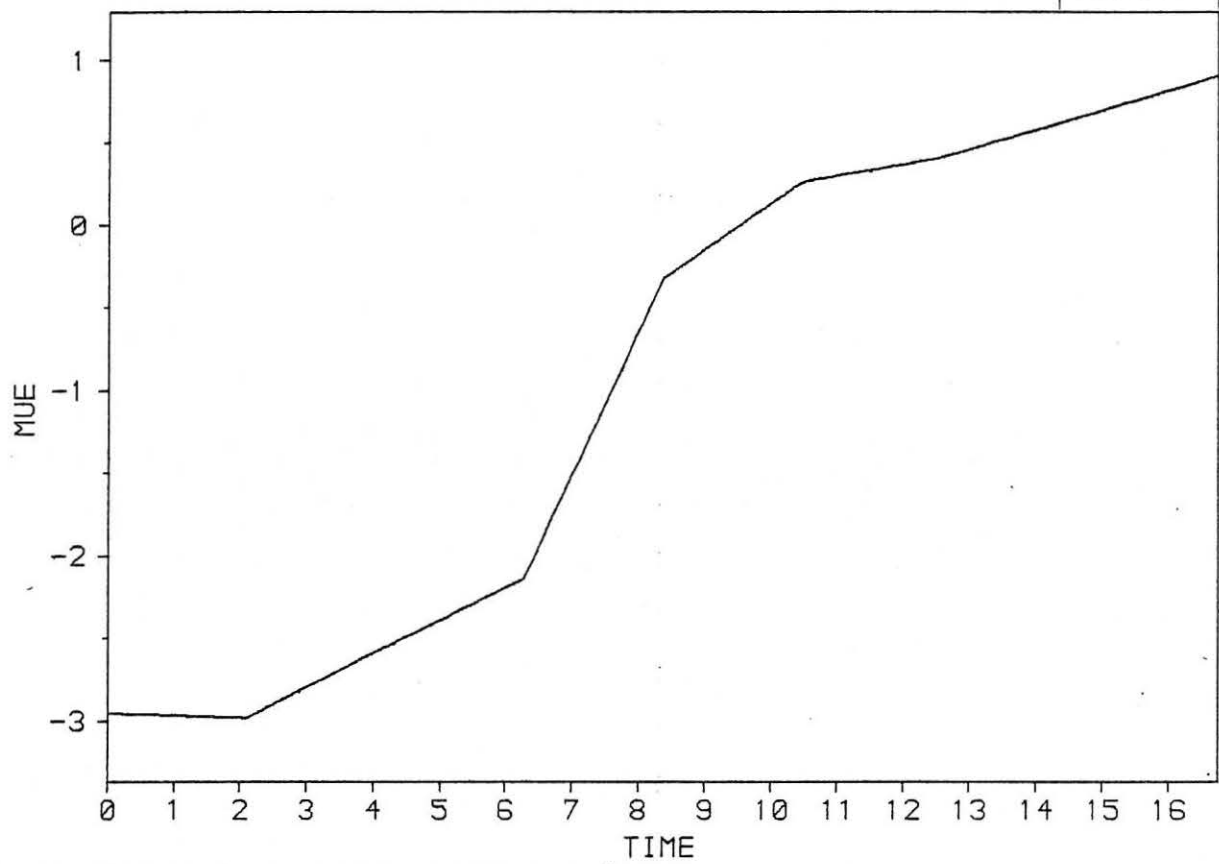
II.3.b



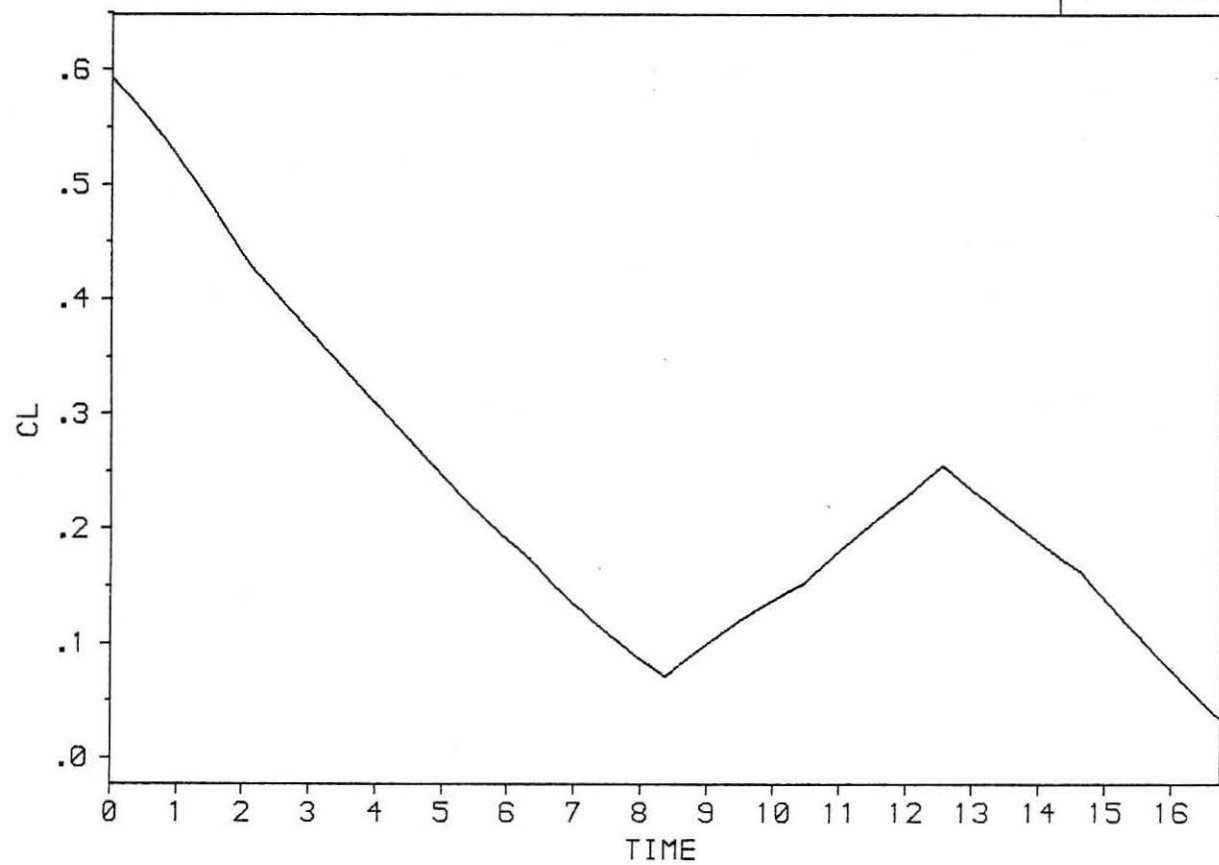
II.3.c



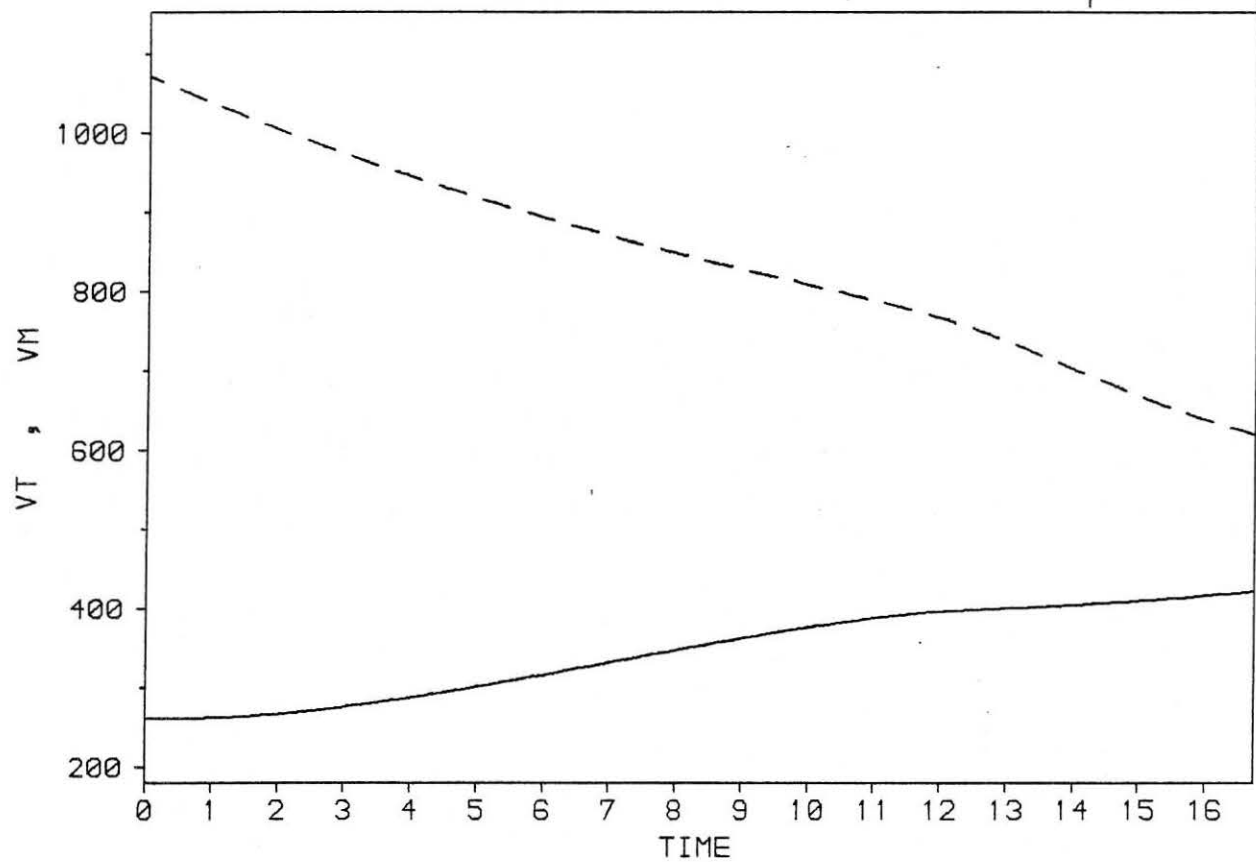
II.3.d



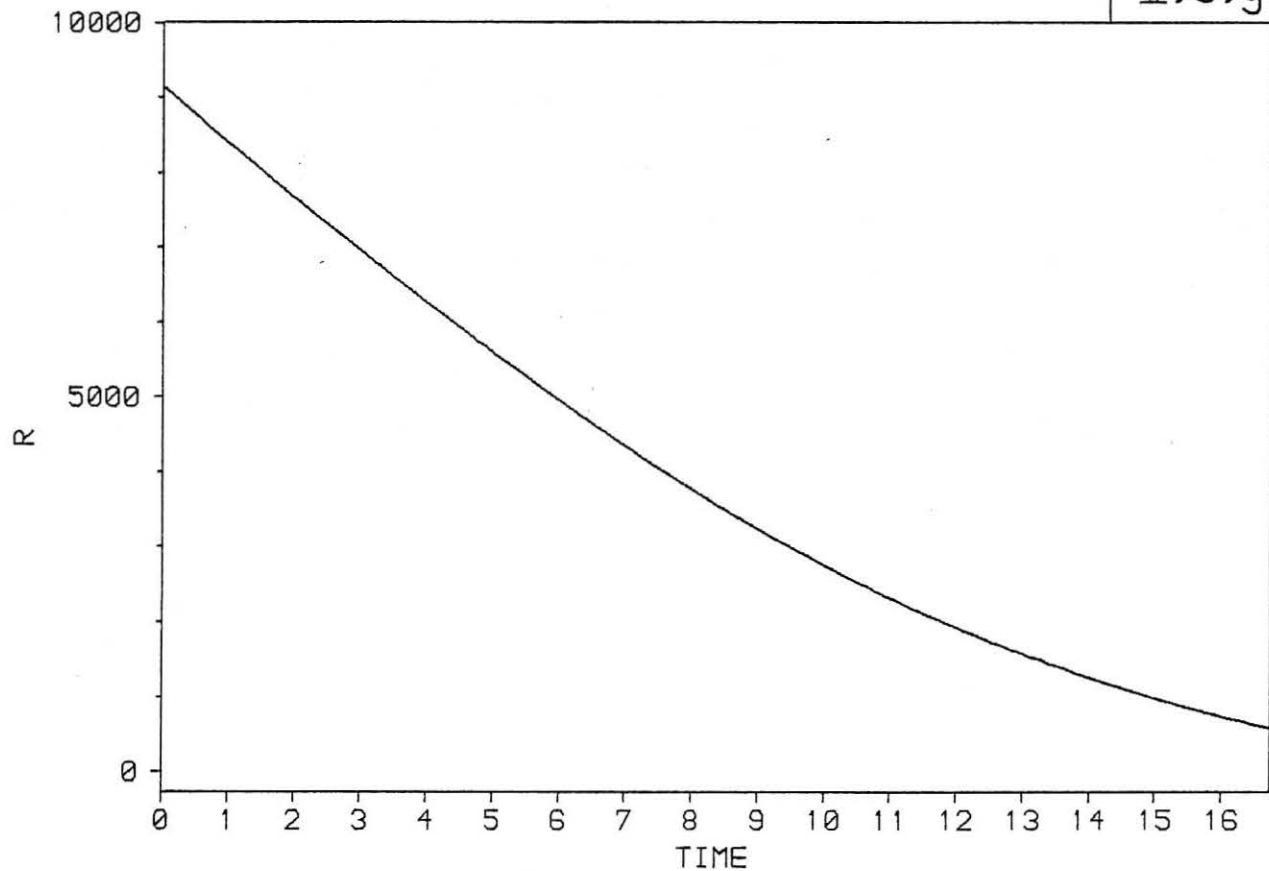
II.3.e



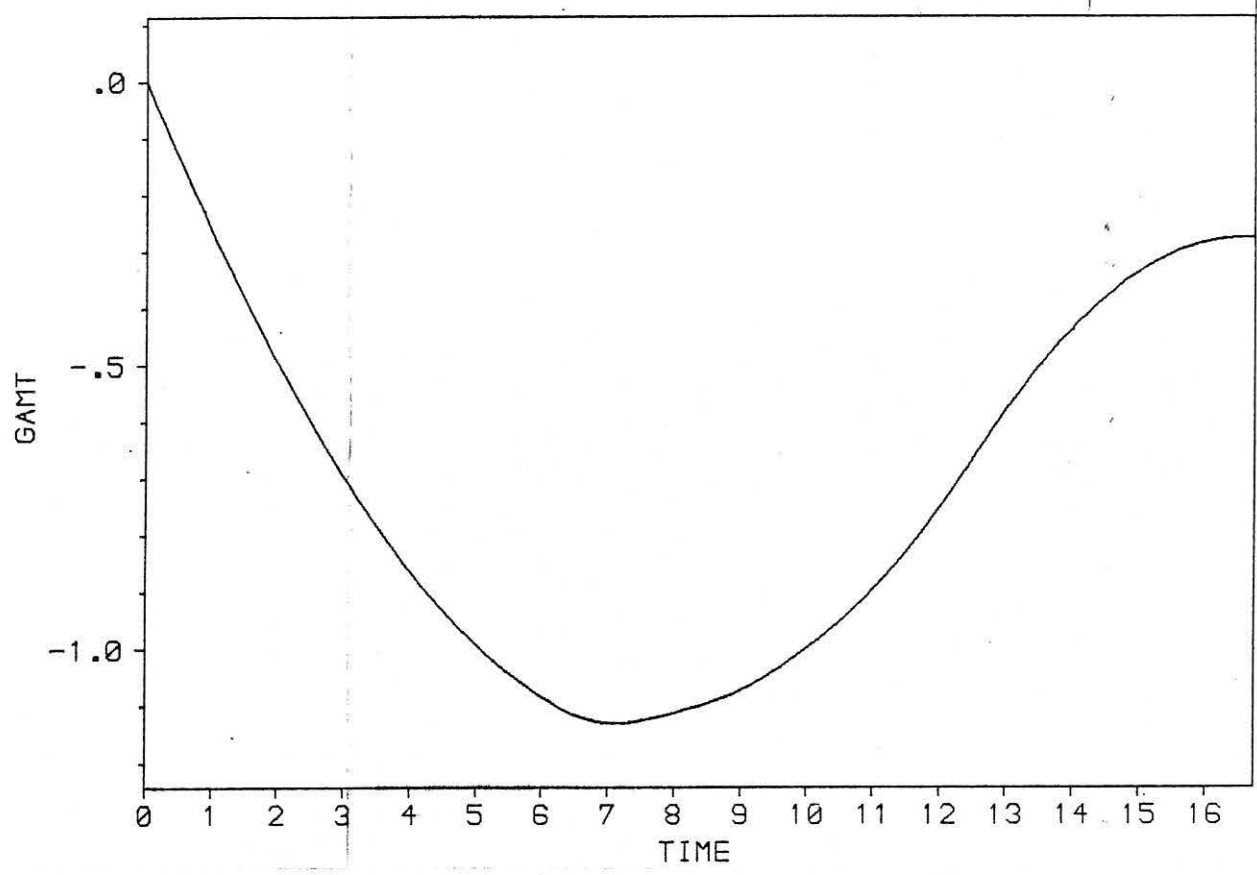
II.3.f



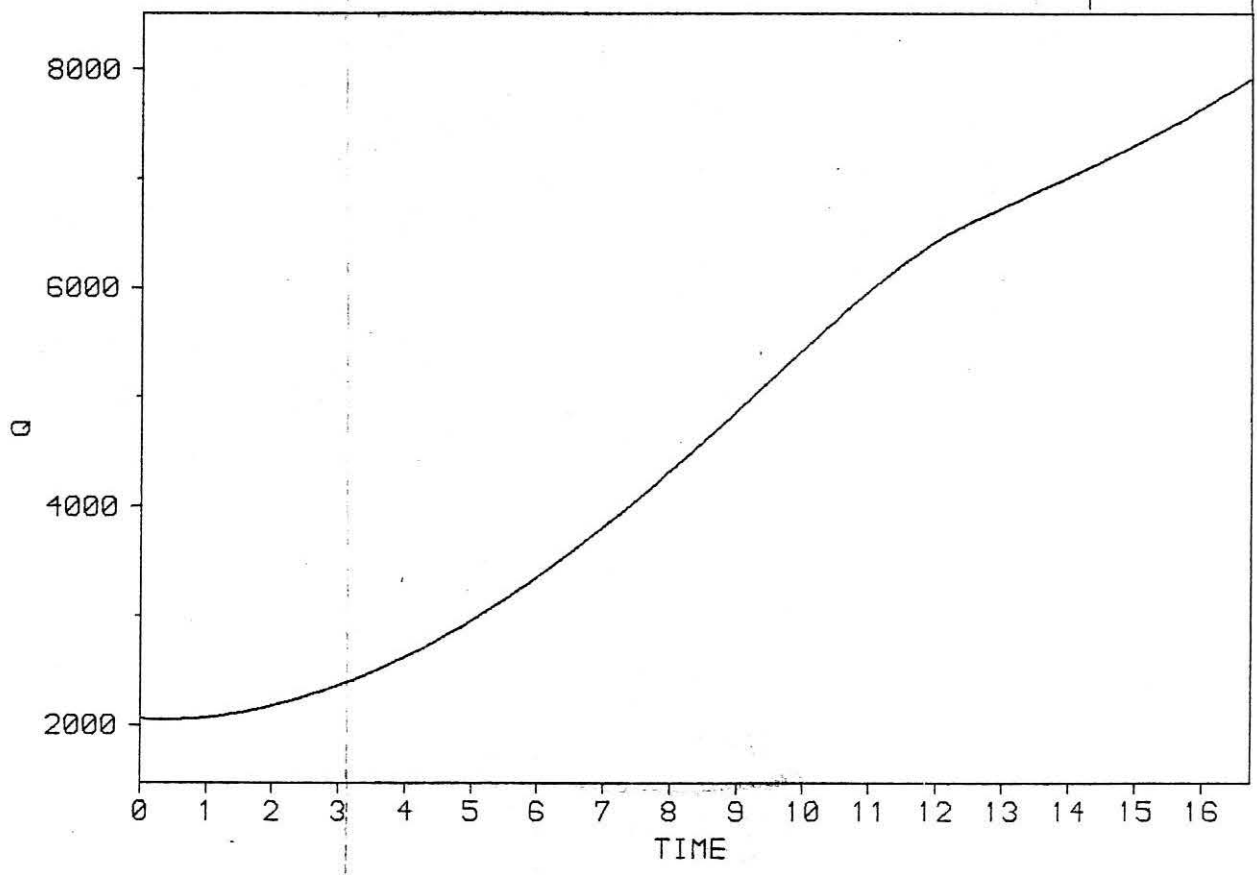
II.3.g



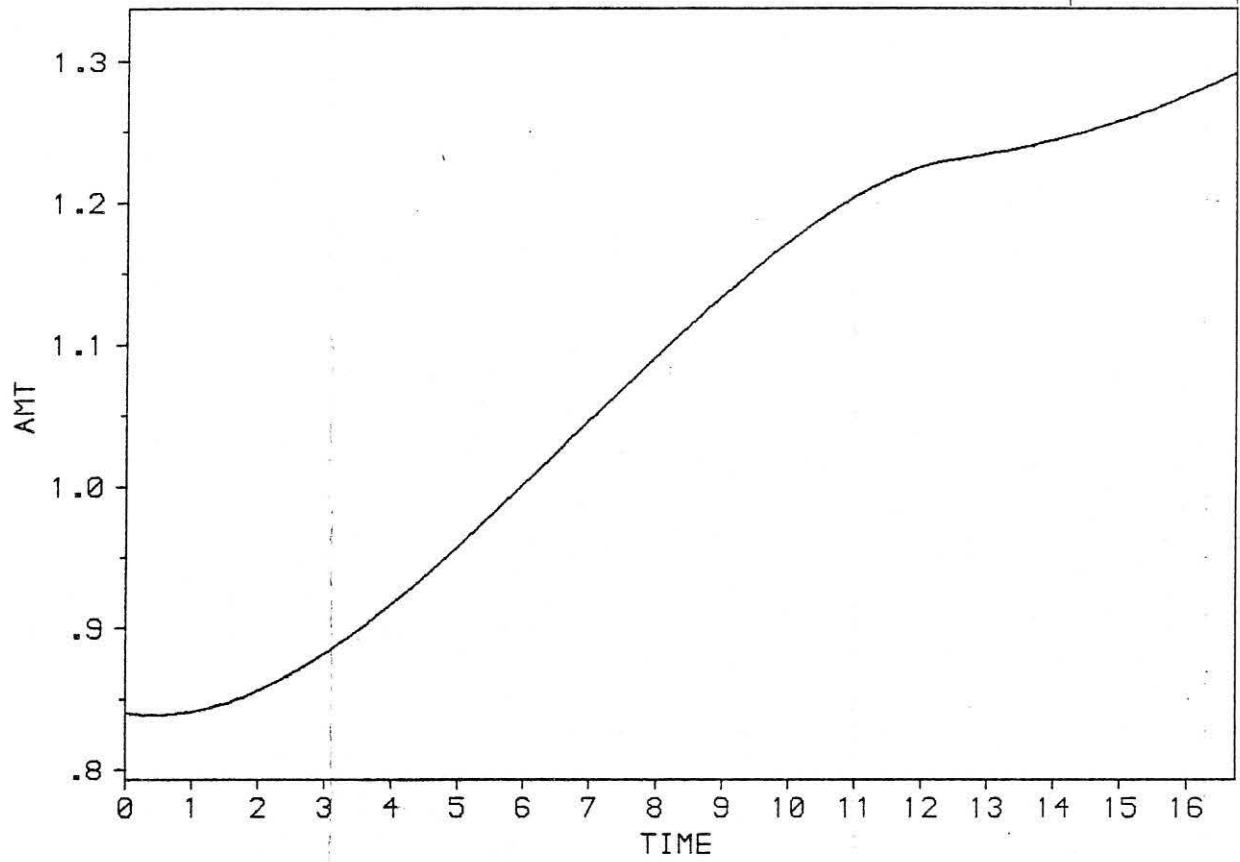
II.3.h



II.3.i



II.3.k



II.3.1

HT , HM

